

数論入門 中間試験問題 (担当 西澤)

- 試験時間は 80 分、持ち込みは全て不可です。
- 求める過程の概略を書いてください。部分点を考慮する場合があります。また、解答だけでは点数を与えません。講義で用いた記法は断りなしで用いて構いませんが、それ以外の記号、記法を用いるときは、その定義を明確にしてください。

問題

1. (1) $484 = 2^2 \cdot 11^2$ であることを用いて、484 の正の約数をすべて求めよ (10 点)。
(2) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ 、 $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$ であることを用いて、360 と 756 の最大公約数、最小公倍数を求めよ (10 点)。

2. フェルマー数 $F_n := 2^{2^n} + 1$ は、 $n \geq 1$ のとき、

$$(1) F_n = (2^{2^{n-1}} - 1)F_{n-1} + 2, \quad (2) F_n = F_0 F_1 \cdots F_{n-1} + 2$$

を満たすことを証明せよ。(各 10 点)

3. (1) ユークリッドの互除法を用いて、248、341 の最大公約数、最小公倍数を求めよ (15 点)。
(2) ユークリッドの互除法を用いて、765 と 1092 の最大公約数、最小公倍数を求めよ (15 点)。
4. 次の不定一次方程式の全ての解を求めよ。解がないときは「解なし」とすること (各 10 点)。

$$(1) 104x - 33y = 4, \quad (2) 333x + 259y = 148, \quad (3) 403x - 221y = 69$$