第6章　固有値・固有ベクトルと行列の対角化

6.1　できるようになってほしい計算

6.1.1　手順

A を $n \times n$ 複素行列で、$\Phi_A(t) \overset{\text{def.}}{:=} |tE_n - A|$ （これを A の**固有多項式**という）としたとき、$\Phi_A(t) = 0$ の解が重複しないものとする。このとき、

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

となるような α_1、$\cdots$、$\alpha_n \in \mathbb{C}$ と、$n \times n$ 複素行列 U は、次の手順で求めることができる。

[1] まず、方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の n 個の解が、求める α_1、$\cdots$、α_n である（これらの値を **固有値**という）。
[2] $j = 1, \cdots, n$ に対し、$A\mathbf{x}_j = \alpha_j \mathbf{x}_j$ を、$\mathbf{x}_j$ を変数とする連立一次方程式として解く。この $\mathbf{x}_j$ を固有値 α_j の**固有ベクトル**という。固有値 α_j の固有ベクトルのひとつを $\mathbf{u}_j$ とする。
[3] $U = [\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n]$ とすると、これが求める行列 U である。

このような手続きを行列の**対角化** という。行列 U を **変換行列**と呼ぶ。

6.1.2　計算例

上の手順で実際に行列を対角化してみる。

例: $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ を対角化する。固有多項式は

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} t-5 & 6 \\ -2 & t+2 \end{vmatrix} = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$$

だから、固有値は 1、2 となる。このとき、固有値 1 の固有ベクトルを $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とすると、

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x_1 - 3x_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

である。よって、固有値 1 の固有ベクトルとして、$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ がとれる。同様に、固有値 2 の固有ベクトルとして $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ がとれるから、

$$U = [\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

とすると、

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

となる。実際にそうなっていることは直接計算でチェックできる。(例終)

例: $A = \begin{bmatrix} 23 & -10 \\ 50 & -22 \end{bmatrix}$ を対角化する。固有多項式は

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} t-23 & 10 \\ -50 & t+22 \end{vmatrix} = t^2 - t + 6 = (t+2)(t-3)$$

だから、固有値は -2、3 となる。このとき、固有値 1 の固有ベクトルを $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とすると、

$$\begin{bmatrix} 23 & -10 \\ 50 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 25x_1 - 10x_2 = 0 \\ 50x_1 - 20x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff 5x_1 - 2x_2 = 0 \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

である。よって、固有値 -2 の固有ベクトルとして、$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ がとれる。同様に、固有値 3 の固有ベクトルとして $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ がとれるから、

$$U = [\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

とすると、

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

となる。実際にそうなっていることは直接計算でチェックできる。(例終)

例: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ を対角化する。固有多項式は

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 2 & 2 \\ 2 & t+1 & -2 \\ 2 & -2 & t-4 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t-3)$$

だから、固有値は 1、2、3 である。固有値 1 の固有ベクトルを $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ とすると、

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

である。よって、固有値 1 の固有ベクトルとして、$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ がとれる。同様に、固有値 2 の固有ベクトル $\mathbf{u}_2$、固有値 3 の固有ベクトル $\mathbf{u}_3$ として、$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ がとれるから、変換行列 U を

$$U = [\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

とすると、

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

となる。実際にそうなっていることは直接計算でチェックできる。（例終）

例: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \end{bmatrix}$ を対角化する。

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -2 \\ -1 & t+1 & -1 \\ -4 & 12 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)(t^2+1) = (t-1)\,(t-i)\,(t+i)$$

だから、固有値は 1、i、$-i$ である。固有値 1 の固有ベクトルを $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ とすると、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 12x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

である。よって、固有値 1 の固有ベクトルとして、$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ がとれる。同様に、固有値 i の固有ベクトル $\mathbf{u}_2$、固有値 $-i$ の固有ベクトル $\mathbf{u}_3$ として、$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4+2i \\ 1+i \\ -4 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 4-2i \\ 1-i \\ -4 \end{bmatrix}$ がとれる。よって、変換行列 U を

$$U = [\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 3 & 4+2i & 4-2i \\ 1 & 1+i & 1-i \\ -1 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

とすると、

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

となる。実際にそうなっていることは直接計算でチェックできる。(例終)

問題: 次の行列を対角化し、そのときの変換行列を求めよ。

$$(1)\quad \begin{bmatrix} 27 & 8 \\ -96 & -29 \end{bmatrix}, \qquad (2)\quad \begin{bmatrix} 11 & 15 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}, \qquad (3)\quad \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & 8 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad (4)\quad \begin{bmatrix} 7 & 6 & 14 \\ 2 & 1 & 4 \\ -4 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$(5)\quad \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 & -8 \\ -6 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & -6 \end{bmatrix}, \qquad (6)\quad \begin{bmatrix} 8 & 8 & 10 & 2 \\ -8 & -7 & -10 & -1 \\ -3 & -4 & -3 & -1 \\ 8 & 8 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

6.2　計算がうまくいく理由

6.2.1　準備−代数学の基本定理

以後、前節の計算でなぜ行列の対角化ができるかを証明する。議論の中で代数方程式を解かなければならない。しかし、例えば、2 次方程式 $at^2 + bt + c = 0, \quad (a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ は、$b^2 - 4ac < 0$ のときは、t が実数になるような解を持たなかった。一方、以後の議論では、このような代数方程式の解を含む数のクラスを考えたい。そのため、次の事実に注意する。

定理 6.1 (代数学の基本定理) 複素係数の n 次代数方程式

$$t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0 \qquad (a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{C})$$

は n 個の複素数解を持つ。すなわち、n 次多項式 $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ は、ある複素数の組 α_1、$\cdots$、α_r を用いて

$$(t - \alpha_1)^{n_1}(t - \alpha_2)^{n_2} \cdots (t - \alpha_r)^{n_r} \qquad (n_1 + \cdots + n_r = n)$$

と因数分解される。

証明は複素関数論の知識が必要なので、ここでは省略する。興味のある人は、高木貞治 「解析概論」(岩波書店)などを参照してほしい。この定理より、複素数 $\mathbb{C}$ をスカラーとしておけば、代数方程式の解を行列や数ベクトルの成分にすることが可能になる。以後、この章では、行列の成分を複素数 $\mathbb{C}$ とする。

6.2.2　固有値と固有多項式

定義 6.2 $n \times n$ 行列 A に対し、$\alpha \in \mathbb{C}$、零ベクトルでない $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ が存在し、$A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$ を満たすとき、α を A の**固有値**、$\mathbf{u}$ を A の**固有ベクトル**という。

命題 6.3 α が A の固有値であることと、$|\alpha E_n - A| = 0$ であることは同値。

（証明）（$\Rightarrow$） α を固有値とする A の固有ベクトルを $\mathbf{u}_0$ とすると、$A\mathbf{u}_0 = \alpha\mathbf{u}_0$。すなわち、$(\alpha E_n - M)\mathbf{u}_0 = \mathbf{o}$ （$\mathbf{o}$ は $\mathbb{C}^n$ の零ベクトル）がいえるから、n 元連立方程式 $(\alpha E_n - A)\mathbf{x}_0 = \mathbf{o}$ は $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ 以外の非自明な解を持つ。よって、$|\alpha E_n - A| = 0$ となる。

（$\Leftarrow$） $|\alpha E_n - A| = 0$ より、連立 1 次方程式 $(\alpha E_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ は非自明解を持つから、その解 $\mathbf{u}$ が、α を固有値とする固有ベクトルであることがわかる。（証明終）

定義 6.4 $n \times n$ 行列 A に対し、$\Phi_A(t) := |tE_n - A|$ は、t の複素係数 n 次多項式。この $\Phi_A(t)$ を A の**固有多項式**という。固有多項式は重複も含めて n 個の解を持ち、それらは A の固有値となる。

例: $A := \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ とする。このとき、A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ は

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} t-7 & 2 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix} = t^2 - 8t + 15 = (t-3)(t-5)$$

となり、固有値は、この方程式の解 3、5 になる。固有値が 3 のときの固有ベクトルを $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ とすると、

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 4u_1 - 2u_2 = 0 \qquad \therefore \quad \mathbf{u} = \lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

となる。固有値が 5 のときの固有ベクトルを $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ とすると、

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v_1 - v_2 = 0 \qquad \therefore \quad \mathbf{v} = \mu\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\mu \in \mathbb{C})$$

となる。（例終）

6.2.3 行列の対角化

定理 6.5 $n\times n$ 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ が n 個の異なる解 α_1、$\cdots$、α_n を持ち、その固有ベクトルをそれぞれ、$\mathbf{u}_1$、$\cdots$、$\mathbf{u}_n$ とする。$n\times n$ 行列 U を $U \overset{\text{def.}}{=} [\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n]$ で定義すると、U は逆行列を持ち、$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$ となる。

（証明の概略） U が逆行列を持つことは認める。このとき、

$$AU = A[\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n] = [A\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n] = [\alpha_1\mathbf{u}_1, \cdots, \alpha_n\mathbf{u}_n] = [\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n]\begin{bmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\iff \quad AU = U\begin{bmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{bmatrix} \quad \iff \quad U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

となり、主張は成立する。（証明終）