Self Dual Groups and Related Topics II

花木 章秀 (Akihide Hanaki)

山梨大学工学部

1 はじめに

代数的組合せ論の問題に関連して self dual 群という概念がある．本講演では self dual 群についての基本的な事柄と簡単な例を紹介する．

始めに定義をしよう．G は常に有限群としその既約指標を $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1 = 1_G, \chi_2, \cdots, \chi_k\}$, 共役類を $\mathrm{Cl}(G) = \{C_1 = \{1\}, C_2, \cdots, C_k\}$ とする．$|\mathrm{Irr}(G)| = |\mathrm{Cl}(G)|$ であることに注意しておく．C_i の代表元を x_i とする．G が次の条件を満たすとき self dual であるという．

適当に番号を付け替えて

$$|C_i|\chi_j(x_i)/\chi_j(1) = \chi_i(1)\chi_i(x_j)$$

がすべての i, j について成り立つ．

この条件は G で定義される 群 association scheme が self dual であることと同値な条件である．association scheme が self dual であることは [1], 定義 3.9 で定義されている．self dual 群を考えることは [1], 問題 3.12 を考えることである．

また次の条件も同様に重要である．

(1) $|C_i|^{-1/2}\hat{C}_i \mapsto \chi_i$ が複素数体上の群環の中心と指標環の同型を与える．

(2) $|C_i| = \chi_i(1)^2$ がすべての i について成り立つ．

一般に self dual ならば (同じ番号付けで) (1) を満たし (1) を満たすならば (2) を満たすことがわかる．従って (2) の条件が一番弱いわけであるがその例さえも多くは知られていないというのが現状である．

2 一般的な結果

self dual 群に関する幾つかの結果を紹介する．始めに先に述べた次のことを証明しておく．

命題 2.1 G が *self dual* ならば *(1)* を満たし, *(1)* を満たすならば *(2)* を満たす．

証明． まず G が self dual であると仮定する．$x_i = 1$ とすると $\chi_i(x_j) = 1$ がすべての j について成り立つので $\chi_i = 1_G$ である．すなわち単位元からなる共役類と単位指標が対応する．次に $x_j = 1$ とすれば (3) を満たすことがわかる．

複素数体上の群環の中心と指標環の構造定数 (それぞれ基底は $\{\hat{C}_i\}$, $\{\chi_i\}$) はよく知られておりそれぞれ

$$\begin{aligned} t_{ij}^k &= \frac{|C_i||C_j|}{|G|}\sum_l \frac{\overline{\chi_l(x_i)\chi_l(x_j)}\chi_l(x_k)}{\chi_l(1)}, \\ u_{ij}^k &= (\chi_i\chi_j, \chi_k)_G \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_l |C_l|\overline{\chi_l(x_i)\chi_l(x_j)}\chi_l(x_k) \end{aligned}$$

で与えられる．群環の中心の基底を $\{|C_i|^{-1/2}\hat{C}_i\}$ とすれば構造定数 v_{ij}^k は

$$\begin{aligned} v_{ij}^k &= \frac{|C_k|^{1/2}}{|C_i|^{1/2}|C_j|^{1/2}} t_{ij}^k \\ &= \frac{|C_i|^{1/2}|C_j|^{1/2}|C_k|^{1/2}}{|G|} \sum_l \frac{\overline{\chi_l(x_i)\chi_l(x_j)}\chi_l(x_k)}{\chi_l(1)} \\ &= \frac{|C_i|^{1/2}|C_j|^{1/2}|C_k|^{1/2}}{|G|} \sum_l \frac{1}{\chi_l(1)^4} \overline{\chi_l(x_i)}\chi_l(1)\overline{\chi_l(x_j)}\chi_l(1)\chi_l(x_k)\chi_l(1) \\ &= \frac{|C_i|^{1/2}|C_j|^{1/2}|C_k|^{1/2}}{|G|} \sum_l \frac{1}{|C_l|^2} \frac{|C_l|\overline{\chi_i(x_l)}}{\chi_i(1)} \frac{|C_l|\overline{\chi_j(x_l)}}{\chi_j(1)} \frac{|C_l|\chi_k(x_l)}{\chi_k(1)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_l |C_l| \overline{\chi_l(x_i)\chi_l(x_j)}\chi_l(x_k) = u_{ij}^k \end{aligned}$$

となり (2) を満たすことがわかる．

次に (2) の条件を仮定する．$x_i^{-1} \in C_{i'}$ とすれば $\chi_{i'} = \overline{\chi_i}$ である．($(\chi_i\chi_{i'}, 1_G) \neq 0$ となる唯一つの既約指標だから．) 従って $t_{ii'}^1 = |C_i|$, $v_{ii'}^1 = \chi_i(1)^2$ より $|C_i| = \chi_i(1)^2$ を得る． □

この命題に対して (2) を満たし (1) を満たさない例は [5] で構成されているが (1) を満たすことが self dual と同値であるかどうかはわかっていない．

また条件 (2) について次の予想がある．

予想 2.2 (清田) 条件 *(2)* を満たす群はべき零である．

これに対して次の結果がある．

定理 2.3 (奥山, [9]) *self dual* 群はべき零で, そのすべてのシロー群も *self dual* である．

この定理によって self dual 群だけを考えるならば, p-群だけを考えればよいことになる．(1) または (2) の条件だけでは可解かどうかもわかっていない．

3 いくつかの例

今までに知られている self dual 群の例を紹介する．まず, abel 群は self dual である事がすぐに分かる．abel 群以外の self dual 群の最小位数は 64 であり, 同じ位数に 10 個の self dual 群がある．この 10 個の群は非常に似ている．実際, これらは互いに isoclinic ([3] 参照) である．しかし, isoclinism は (2) の性質は保存するが, self dual という性質は保存しないことがわかっている．

3.1 鈴木 2-群の拡張として得られる例

q は素数べき, s は正の整数とする．θ を $\mathrm{Gal}(\mathrm{GF}(q^s)/\mathrm{GF}(q))$ の生成元とする．また l を正の整数とする．このとき

$$G = G(l, q^s, \theta) = \{u(a_1, \cdots, a_l) | a_i \in \mathrm{GF}(q^s)\}$$

に対して積を

$$u(a_1, \cdots, a_l)u(b_1, \cdots, b_l) = u(c_1, \cdots, c_l),$$

ただし

$$c_i = a_i + \sum_{k=1}^{i-1} a_{i-k}^{\theta^k} b_k + b_i,$$

で決めると G は群になる．($q=2$, $l=2$, s は奇数としたときが鈴木 2-群 $A(s,\theta)$ ([6] 参照) である．)

定理 3.1 (奥山-花木) *G は上で定義された群とし, l は s のどの素因数よりも小さく $(q,s)=1$, $(q-1,s)=1$ と仮定する．このとき G は条件 (2) を満たし更に $l \leq p-1$, $l=s-1$ であれば G は self dual である．しかし $l > \mathrm{charGF}(q)$ のときは G は self dual ではない．*

証明は指標表を完全に書き上げることでなされる [5]．この定理では (2) を満たすすべての群についてself dual の判定を与えているわけではない．残りの場合も判定するべきとは思っているがなかなか容易ではない．また (2) を満たすための条件もより弱く出来るかもしれないが仮定なしでは成り立たない例が確認できている．($q=s=l=2$ とすると G は 位数 8 の extra-special 2-群 と位数 2 の巡回群の直積に分解する．)

この例で self dual になるための条件は非常に強いものではあるがいくらでも存在することはすぐにわかりこの例を使って self dual 群の derived length (nilpotency class) がいくらでも大きくなれることがわかる．derived length が大きくとれる例はこの例しか知られていない．

3.2 交代多元環から得られる例

q を奇素数 p のべきとし M を $\mathrm{GF}(q)$ 上 $n=2m+1$ ($m \geq 1$) 次元のベクトル空間とする．$\Lambda(M)=\bigoplus_{i=0}^{n}\Lambda^i(M)$ を交代多元環とする．$G=G(M)=\Lambda^{\mathrm{od}}\times\Lambda^{ev}$, $\Lambda^{\mathrm{od}}=\bigoplus_{i=1}^{m}\Lambda^{2i-1}(M)$, $\Lambda^{\mathrm{ev}}=\bigoplus_{i=1}^{m}\Lambda^{2i}(M)$ とおく．$G \ni (a,x)$, (b,y), a, $b\in\Lambda^{\mathrm{od}}$, x, $y\in\Lambda^{\mathrm{ev}}$, に対して積を

$$(a,x)(b,y)=(a+b,ab+x+y)$$

で定義すれば G は群になる．このとき次が成り立つ．

定理 3.2 (奥山) *G は self dual 群である．*

証明は [10] を参照されたい．この群の derived length (nilpotency class) は 2 である．

3.3 位数 p^5 (p は奇数) の例

p を奇素数とする．

$$G=\langle a_1,\ a_2,\ b,\ c_1,\ c_2 \mid [a_1,a_2]=b,\ [a_i,b]=c_i,\ a_i^p=\zeta_i,\ b^p=c_i^p=1\ (i=1,\ 2)\rangle,$$

ただし ζ_1,ζ_2 は $\langle c_1,c_2\rangle$ の元で, 群の位数が p^5 となるものとする．(例えば $(\zeta_1,\zeta_2)=(1,1)$. 完全なリストは [8] Φ_6 にある．) このとき

定理 3.3 *G は self dual 群である．*

群が具体的であるので証明はそれ程難しくない [4]．この例を無限系列に拡張することはまだ出来ていない．(飛田明彦氏によって (2) の性質を満たすものの無限系列には拡張されたが今のところ self dual かどうかはチェックできていない．これは後述する F-algebra 群として定義される.)

4 これからの問題

ここでは, やりたいと思ってはいるができないでいることを紹介する．一般に self dual 群の判定は容易ではない．(2) の条件は比較的簡単に判定できるがそれ以外の条件の判定はたとえ指標表が完全に分かって

いても難しい．それは共役類と既約指標の間にうまい対応を付けてやらなくてはならないからである．しかし，もっと難しいのは self dual でないことを示すことである．self dual であることを示すにはうまい対応を一つ見つければよいが，self dual でないことを示すにはどんな対応でも条件が満たされないことを言わなくてはならない．この問題を考えるために，共役類と既約指標との間の対応をもっとよく調べるべきであろう．簡単なことではあるが，次の結果を得ている．

命題 4.1 *G は条件 (2) を満たす群とし，N を G の正規部分群とする．N に含まれる共役類に対応する既約指標の集合は，ある正規部分群 K が存在して $\mathrm{Irr}(G/K)$ に一致する．*

また，N を K に対応させる対応は G のすべての正規部分群の間の包含関係を逆にする一対一対応を与える．

これは N に含まれる共役類の作る群環の中心の部分空間が部分多元環になることから，それに対応する既約指標の作る部分空間も指標環の中で部分空間をなすことからわかる．

この結果は self dual 群の対応を共役類や既約指標をある同値類に分けて考えられることを示している．各同値類の中の対応も調べるべきであろう．

最後に Isaacs [7] にある，F-algera 群について簡単に紹介しておく．F を有限体とし R を F 上有限次元の多元環とする．$J(R)$ を R の Jacobson 根基とすると，$G = 1 + J(R)$ は群になる．このような形に書ける群を F-algebra 群という．3.1 と 3.2 にある例は適当な有限体 F について F-algebra 群となっている．self dual 群はこのように多元環の影響が強いのではないかということが奥山哲郎氏によって指摘されている．(これを聞いたときにはまだ 3.3 の例は確かめられていなかった．3.3 の例は F-algebra 群になるかどうかは調べていない．) [7] の主定理を紹介しておく．

定理 4.2 (Isaacs) *F-algebra 群の既約指標の次数は $|F|$ のべきである．*

self dual 群との関連があるとすれば，共役類の元数についても同様の結果が成り立つことが期待される．実際次が成り立つ．

命題 4.3 *F-algebra 群の共役類の元数は $|F|$ のべきである．*

もちろん F-algebra 群すべてが self dual になるわけではない．しかし，少なくとも例を探すのであれば F-algebra 群を考えてみることは有効であるのではないかと思っている．

参考文献

[1] 坂内英一，代数的組合せ論 - アソシエーションスキームの最近の話題，数学 45, (1993) 55-75.

[2] E. Bannai, *Association schemes and fusion algebras* (*an introduction*), J. Alg. Comb. **2** (1993) 327–344.

[3] P. Hall, *The classification of prime-power groups*, J. Reine Angew. Math. **182** (1940), 130–141.

[4] A. Hanaki, *Self dual groups of order p^5* (*p an odd prime*), preprint.

[5] A. Hanaki and T. Okuyama, *Groups with some combinatorial properties*, preprint.

[6] B. Huppert and N. Blackburn, Finite Groups II, Berlin-Heidelberg-New York 1982.

[7] I. M. Isaacs, *Characters of groups associated with finite algebras*, J. Alg. **177** (1995) 708–730.

[8] R. James, *The groups of order p^6 (p an odd prime)*, Math. Comp. **43** (1980) 613–637.

[9] T. Okuyama, *Self dual groups are nilpotent*, preprint.

[10] T. Okuyama, *A construction of self dual groups*, preprint.