On the Robinson's $A_R(H)$-blocks

稗田吉成

3月9日（第一回若手研究会　大阪市立大学）

1　記号と準備

ここでは，G を有限群，p は G の位数を割り切る素数，(R, K, k) を p-モジュラー系，

すなわち，$\begin{cases} R\text{は完備離散付値環（その極大イデアルを }(\pi)\text{）}, \\ K\text{は }R\text{の商体で, その標数は }0, \\ k\text{は }R\text{の剰余体 }(R/(\pi)),\text{ その標数は }p \end{cases}$

とし，さらに，Kは 1 の $|G|$ 乗根を含むと仮定する。

また，G の部分集合 Sに対して，$\widehat{S}$で，適当な係数環 $\mathfrak{o}$ 上の群環 $\mathfrak{o}G$ における Sの元の和，つまり，$\widehat{S} := \sum_{x \in S} x$ を表すことにする。

さらに，Hを G の部分群とするとき，$I_{\mathfrak{o}}(H)$ は$\widehat{H}$で生成される $\mathfrak{o}G$ の両側イデアルを表し，これをいつものような以下の作用で右 $\mathfrak{o}[G \times G]$-加群とみる:

$\alpha \cdot (x, y) := x^{-1}\alpha y$ for all $\alpha \in I_{\mathfrak{o}}(H), x, y \in G$.

その準同型環を $A_{\mathfrak{o}G}(H)$(あるいは，単に $A_{\mathfrak{o}}(H)$):= $End_{\mathfrak{o}[G\times G]}(I_{\mathfrak{o}}(H))$ とする。同様に，$\widehat{H}$で生成された $\mathfrak{o}G$ の右イデアル$\widehat{H}\mathfrak{o}G$ に対して，$S_{\mathfrak{o}}(H) := End_{\mathfrak{o}G}(\widehat{H}\mathfrak{o}G)$ とすると，$S_{\mathfrak{o}}(H)$ は Hecke 環としてよく研究されている対象であり，$S_{\mathfrak{o}}(H)$ が $\{\omega_x; \omega_x(\widehat{H}) := \widehat{HxH}, x \in H \setminus G/H\}$ を $\mathfrak{o}$-基底として持つこともよく知られている。(例えば [2] 参照)

さて，G.R.Robinson は [4] の中で，$A_R(H) \simeq Z(S_R(H))$（R-多元環）を示し，$S_R(H)$ の中心的べき等元の研究に $A_R(H)$ の考察（$A_R(H)$-ブロックの概念）を導入した。

ここでの目的は，その紹介とその例を与えることである。

上の記号以外も標準的なものを使う。例えば，

$Irr(G)$ は G の（通常）既約指標全体の集合，

e_χは既約指標 $\chi \in Irr(G)$ に対応する KG の中心的原始べき等元，

$\delta(B)$ は RG の p-ブロック Bの不足群

を表す。(例えば，[1]，[3] を参照)

2　$A_R(H)$-ブロックの定義とその性質

[4] に従って，$A_R(H)$-ブロックを定義する。そのために，K-多元環準同型 ϕを次のように定義する：$\phi : Z(KG) \to Z(S_K(H))(z \mapsto r_z(\alpha \mapsto \alpha z))$.

この ϕに対して，次のことがわかる。

補題 1 ([4]Theorem1.1 の証明参照)

(1) $\phi(e_\chi) = \chi(1)/|G| \sum_{x \in H\backslash G/H} \chi(\widehat{Hx^{-1}})\omega_x$.

(2) ϕの核は $\{e_\chi ; (\chi|_H, 1_H)_H = 0\}$ によって（K上）生成される。

(3) ϕは全準同型。

（証明）

(1) $e_\chi = \chi(1)/|G| \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g$であることよりいえる。

これ以降，$\Phi := \{\chi \in Irr(G); (\chi|_H, 1_H)_H \neq 0\}, \overline{\Phi} := \{\chi \in Irr(G); (\chi|_H, 1_H)_H = 0\}$ とする。

(2) S_χを $\chi \in Irr(G)$ を与える既約な KG-加群とする。ここで，KG が半単純 K-多元環であり，$Z(KG) = \bigoplus_{\chi \in Irr(G)} Ke_\chi$であること及び $S_\chi e_{\chi'} = \delta_{\chi,\chi'} S_\chi$であることに注意すると，$\chi \in Ker\phi \iff \widehat{H}KG \cdot e_\chi = 0 \iff S_\chi \not| \widehat{H}KG \iff \chi \in \overline{\Phi}$であり，$\{e_\chi ; \chi \in Irr(G)\}$ は K 上線型独立であるから，(2) が成り立つ。

(3) (2) から，$dim_K Im\phi = |\Phi|$。

一方，KGが半単純K-多元環より，$S_K(H) \simeq \bigoplus_{\chi \in \Phi} M_{n(\chi)}(K)$（ここで，$n(\chi) = (\chi|_H, 1_H)_H$）であり，$Z(M_{n(\chi)}(K)) \simeq K$であることに注意すると，次元を比較して (3) がいえる。

定理 1 *(*[4] Theorem 1.1 *)* $A_R(H) \simeq Z(S_R(H))$（R-多元環）

補題１から，εを $A_R(H)$ のべき等元（すなわち，$S_R(H)$ の中心的べき等元）とすると次の２条件を満たすΦの空でない部分集合 βが存在する:

(1) $\varepsilon = \phi(e_\beta)$，ここで，$e_\beta := \sum_{\chi \in \beta} e_\chi$.

(2) (整条件) 任意の $x \in G$ に対して，$\sum_{\chi \in \beta} \chi(\widehat{Hx})\chi(1)/|G| \in R$.

特に，次のように $A_R(H)$ の原始べき等元（すなわち，$S_R(H)$ の中心的原始べき等元）に対応する $A_R(H)$-ブロックとその不足群が定義される。([4] 参照)

定義 1 ([4] 参照)

(1) Φの空でない部分集合 βが整条件を満たす最小の集合のとき，すなわち，$\phi(e_\beta)$ が $S_R(H)$ の中心的原始べき等元であるとき，βを G の既約指標の $A_R(H)$-ブロックと呼ぶ。

(2) $Tr_T^{G\times G}(\alpha) := \sum_{(x,y)\in T\backslash G\times G} \alpha^{(x,y)} = \phi(e_\beta)$ を満たす$\alpha \in E^T$が存在する $G\times G$ の位数最小の部分群 Tを $A_R(H)$-ブロック βの不足群と呼び，$\delta_H(\beta)$ と表記する。

ここで，$E := End_R(I_R(H)), E^T := Inv_T(E)$ とする。

上の定義から次が成り立つ。

命題 1 *(*[4] 参照*)*

(1) 任意の $\chi \in \Phi$に対して， χの属する $A_R(H)$-ブロックが唯一存在する。

特に，$A_R(H)$-ブロックは唯一の p-ブロックに属する。

(2) $A_R(H)$-ブロック βに対して，$\delta_H(\beta)$ は $G\times G$ の p-部分群であり，それは $G\times G$-共役を除いて一意的に存在する。

(3) $A_R(H)$-ブロック βに対して，$vx(\phi(e_\beta)I_R(H)) =_{G\times G} \delta_H(\beta)$。

ここで，左辺は右 $R[G\times G]$-加群としての$\phi(e_\beta)I_R(H)$ のヴァーテックスであるとする。

（証明）

(1) （一意性）: βと β'を $\chi \in \beta, \beta'$を満たす $A_R(H)$-ブロックとすると，$\phi(e_\beta)\phi(e_{\beta'}) = \phi(e_{\beta\cap\beta'}) \neq 0$ である。故に，$A_R(H)$-ブロックの定義より，$\beta = \beta'$.

（存在性）: $\chi \in \Phi$に対して，$\chi \in B$なる G の p-ブロック Bが唯一存在するが，e_Bは $Z(RG)$ の原始的べき等元であることから，Bは整条件を満たす。よって，χの属する整条件を満たす濃度最小の集合 βが存在する。　以上より後半もいえる。

(2)，(3) は G-多元環の一般論より示される。

以下のためにさらに記号を定義する。

自明な指標 1_Gは常にΦに属するから，1_Gの属する G の $A_R(H)$-ブロックが存在する。そこで，それを主 $A_R(H)$-ブロックと呼び， β_0と表記する。

$\mathfrak{A}_R(H)$ は $\mathfrak{A}_R(H) := \{\beta; \beta$が $A_R(H)$-ブロック $\}$ を表すことにする。

（上から $|\mathfrak{A}_R(H)| \geq 1$。）

[4] における次の主張は $A_R(H)$-ブロックを考える上で重要である。

命題 2 ([4], Lemma 2.1, its Remark, Lemma2.4 and Corollary2.5)
βを $A_R(H)$-ブロック，$C := core_G(H)(:= \cap_{g \in G} H^g)$ とし，$\overline{G} := G/C$とする。
このとき，次が成り立つ。

(1) 任意の $x, y \in G$ に対して，$|\delta_H(\beta)|/|C_G(x)||C_G(y)| \sum_{\chi \in \beta} \chi(x)\chi(y) \in R.$
特に，$|\delta_H(\beta)|/|G \times G| \sum_{\chi \in \beta} \chi(1)^2 \in R.$

(2) βを含む G の（唯一の）p-ブロック Bに対して，$\delta_H(\beta) \leq_{G \times G} \delta(B) \times \delta(B).$

(3) p-ブロック Bは $A_{RG}(\{1\})$-ブロックとみなせ，$\delta_{\{1\}}(B) =_{G \times G} \delta(B)^{\Delta}.$
ここで，$\delta(B)^{\Delta} := \{(x, x); x \in \delta(B)\}.$
従って，Bは任意の $x \in G$ に対して，$\sum_{\chi \in B} \chi(x)\chi(1)/|G| \in R$を満たす $Irr(G)$ の最小の集合である。.

(4) $A_R(H)$-ブロックは $A_{R\overline{G}}(\overline{H})$-ブロックとみなせる。
特に，$H \triangleleft G$ ならば，$A_R(H)$-ブロックは $R\overline{G}$の p-ブロック。

(5) $H' \leq H$ならば，βを含む $A_{RG}(H')$-ブロック $\widetilde{\beta}$が唯一存在する。

(6) $\beta_0 = \{1_G\}$ であることと $(|G : H|, p) = 1$ であることは同値。

(7) Hが p-部分群ならば，$|\mathfrak{A}_R(H)| \geq |Bl_p(\overline{G})|.$

上の命題 2 から，不足群が Sylow p-部分群となる十分条件を与える。

系 1 *(1)* $(rank_R\beta, p) = 1$ ならば，$\delta_H(\beta)$ は $G \times G$ の *Sylow* p-部分群である。
ここで，$rank_R\beta := \sum_{\chi \in \beta} \chi(1)^2$とする。

(2) $(|G : H|, p) = 1$ ならば，$\delta_H(\beta_0)$ は $G \times G$ の *Sylow* p-部分群である。

（証明）
(1) 命題 2 (1) より明らか。
(2) 上の命題 2 (1)，(6) よりいえる。
また，次も成り立つ。

系 2 $H \lhd G$ とし，$\overline{G} := G/H$とする。このとき，次が成り立つ。

(1) $\overline{G}$が p-群ならば，$\mathfrak{A}_R(H) = \{\beta_0\}$

(2) $\overline{G}$が p'-群ならば，$|\mathfrak{A}_R(H)| = |Irr(\overline{G})|$.

（証明）

(1) 命題 2 (4) と $R\overline{G}$が局所環であることよりいえる。

(2) 命題 2 (4) と任意の$\chi \in Irr(\overline{G})$ に対して，$\{\chi\}$ がブロックであることよりいえる。

3　$A_R(H)$-ブロックの簡単な例

命題 2 (3) では重要な例として，$H = \{1\}$ の場合の $A_R(H)$-ブロックが通常の p-ブロックであることをみた。ここでは，その他の $A_R(H)$-ブロックの簡単な例を与える。

例 1 $H = G$ の時：$\Phi = \{1_G\}$ であり，$\mathfrak{A}_R(G) = \{\beta_0\}, \beta_0 = \{1_G\}$.

例 2 $G = \mathfrak{S}_3 := \langle(1,3),(2,3)\rangle$ の時：

G の指標表及び，各 p の p-ブロックは以下のようになる。

	C_1	C_2	C_3
1_G	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	.	-1

，ここで，C_iは長さ i の巡回置換の共役類とする。

$p = 2 : B_0 = \{1_G, \chi_2\}, B_1 = \{\chi_3\}$.

$p = 3 : B_0 = \{1_G, \chi_2, \chi_3\}$

(1) $H = \langle(1,2)\rangle \in Syl_2(G)$ の時，$\Phi = \{1_G, \chi_3\}$.

$p = 2 : \mathfrak{A}_R(H) = \{\beta_0, \beta_1\}, \beta_0 = \{1_G\}, \beta_1 = \{\chi_3\} = B_1$であり，

$\delta_H(\beta_0) =_{G\times G} P \times P, \delta_H(\beta_1) = 1$

$p = 3 : \mathfrak{A}_R(H) = \{\beta_0\}, \beta_0 = \{1_G, \chi_3\}, \delta_H(\beta_0) =_{G\times G} P \times P$.

(2) $H = \langle(1,2,3)\rangle \in Syl_3(G)$ の時，$\Phi = \{1_G, \chi_2\}$.

$p = 2 : \mathfrak{A}_R(H) = \{\beta_0\}, \beta_0 = \{1_G, \chi_2\} = B_0$

$p = 3 : \mathfrak{A}_R(H) = \{\beta_0, \beta'_0\}, \beta_0 = \{1_G\}, \beta'_0 = \{\chi_2\}$,

$\delta_H(\beta_0) =_{G\times G} P \times P, \delta_H(\beta'_0) =_{G\times G} P \times P$.

参考文献

[1] W. Feit. The Representation Theory of Finite Groups, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[2] P. Landrock. Finite group algebras and their modules, Cambridge Univ.Press,1983.

[3] H. Nagao and Y. Tsushima. Representations of Finite Groups, Academic Press, 1989.

[4] G. R. Robinson. *Some remarks on Hecke algebras*, J. of Algebra, vol.163, 806-812, 1994.