On B_n-graded rings

西中　恒和

１９９６年3月９日（第一回若手研究会）

1　はじめに

S を半群とする。環 R が加法群として部分群 $\{R_s | s \in S\}$ たちの直和になっており、

$$R_s R_t \subseteq R_{st} \quad \textit{for all} \quad s, t \in S$$

を満たしているとき。R を S-graded ring と呼び、特に $R_s R_t = R_{st}$ for all $s, t \in S$ であるとき、storongly S-graded ring と呼ぶ。また、半群 S が $n > 0$ に対し B_n-半群（B_n-semigroup）であるとは、次の条件、

$$s^{n+1} = s \quad \textit{for all} \quad s \in S$$

を満たすときであると定義する。$n = 1$ のとき B_1-半群は band と呼ばれ、よく研究されている。本講では、S が B_n-半群のとき、S-garaded ring R の Jacobson 根基 $J(R)$ が如何なる時、ベキ零（元）イデアルになるかを考える。

ところで、S-graded ring の根基のベキ零性等の研究は一つには多項式環における Amitsur [1] の結果の一般化に端を発し手いるが、群環、特に 無限群上の群環の根基の最近の研究と相俟って、近年盛んに研究されてきている。

大まかに言って S が可換のとき、あるいは S が有限の時にはほぼ期待された結果は得られたといえる。従って S が一般に可換でも有限でもないときを問題としたものが最近の研究の動向である。最近の主なものを二三紹介する。

定理 1.1 ([5],1992) *S を band とし、R を S-graded ring とする。任意に $s, t \in S$ に対し R_s は 1_s を持ち、$1_s 1_t = 1_{st}$ が成り立っていると仮定する。もし任意の元 $s \in S$ に対して、$J(R_s)$ がベキ零元イデアルならば $J(R)$ もベキ零元イデアルである。*

定理 1.2 ([2],1994) *S を局所有限な半群とし、R を S-graded ring とする。もし $s \in S$ で $s^2 = s$ となる任意の元 s に対して、$J(R_s)$ が局所ベキ零イデアルならば $J(R)$ も局所ベキ零イデアルである。*

定理 1.3 ([4],1995) *G を群とし、e をその単位元とする。R を多項式関係を満たす storongly G-graded ring とする。$J(R_e)$ がベキ零元イデアルならば $J(R)$ もベキ零元イデアルである。*

定理 1.1は B_1-半群（の特別な場合）に対する結果であり、それは局所有限であることが知られている。定理 1.2は定理 1.1の band より一般的に局所有限を扱ったものであるが、ベキ零元性については与えられていない。定理 1.3は群には何の制限もないが多項式関係を満たす環に対する結果になっている。大まかに言って定理１、定理２は有限を局所有限へ定理 1.3は可換を多項式関係を満たすものへと拡張したものである。

ところで、一般に B_n-半群は $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 等では局所有限であり n を大きくしたときには一般に局所有限とは限らないことが知られている。また、B_n-半群はそれが有限の時でさえ一般には可換ではないし、それ上の環は多項式関係を満たさない。従って S を B_n-半群としたときの S-graded ring に関する研究は、無限非可換な半群に対する graded ring の研究の足がかりとなると考えられる。

2　分かったこと

半群 S が自由 B_n-半群であるとは任意の $s \in S$ が $s^{n+1} = s$ を満たすが、他の関係においては自由である、即ちある集合 X 上の自由半群 $< X >$ 上で定義される合同な関係（ congruence relation ）で、$< X > \times < X >$ の部分集合 $B = \{(w^{n+1}, w) | w \in < X >\}$ で生成されるものを β とし、$< X >$ を β で割った剰余半群と定義する。加えて、$I \times J$ なる直積集合に積が

$$(i, j)(k, l) = (i, l)$$

で定義されているとき、それは半群となり、rectangular band と呼ばれる。また、B_n-semigroup が群であるとき、B_n-group と呼ぶ。さらに、rectangular band と B_n-group の直積は自然な積で半群となるが、それを rectangular B_n-group と言う事にする。次の結果が得られた。

定理 2.1 正整数 n に対し、S を自由 B_n-半群とし、A を体 F 上の *strongly S-graded algebra* とする。F の標数は *0* かそうでなければ、n を割らないとする。このとき、もし $s \in S$ で $s^2 = s$ を満たす任意の s に対して、$J(A_s)A$ がベキ零元（ *resp.* ベキ零 *)* イデアルならば $J(A)$ もベキ零元（ *resp.* ベキ零 *)* イデアルである。

定理 2.1の証明で、B_n-半群に対する次の特徴づけが本質的な役割を演じている。

命題 2.2 n を正整数 とし、S を *semigroup* とする。この時以下は同値である。

(1) S は *completely simple B_n-semigroup* である。

(2) S は *identity* $X^n Y^n X^n = X^n$ を満たす。

(3) S はある *rectangular B_n-group* と同型である。

B_n-semigroup は completely regular であることが容易に分かる。そして completely regular semigroup は completely simple 半群たちに半束分解されることが知られているので（ see [3] ）、命題 2.2は B_n-semigroup を完全に特徴付けている。命題 2.2と Passman [6] の結果から、素根基に関連した次の結果が容易に導かれる。

定理 2.3 正整数 n に対し、S を B_n-半群とし、R を *strongly* S*-graded ring* とする。R の加法群は n*-torsion free* と仮定する。この時、もし S の任意のべき等元 s に対し、R_s が *semiprime* なら R は *graded semiprime* である。

上において R が graded semiprime とは R が non-zero graded ベキ零イデアルを持たない時のことであるが、一般に semiprime にはならない。実際、S を rectangular band とすると、S は B_1-半群であるが有理整数環上の半群環 $\mathbf{Z}[S]$ は semiprime ではない。

References

[1] S. A. Amitsur, *An embedding of P.I.-rings*, Proc. Amer. Math. Soc., **3**(1952), 3-9

[2] M. V. Clase and E. Jespers, *On the Jacobson Radical of Semigroup Graded Rings*, J. Algebra, **169**(1994), 79-97

[3] J. M. Howie, *Fundamentals of semigroup theory*, London Mathematical Society Monographs No 12 (Academic Press, 1995).

[4] A. V. Kelarev and J. Okniński, *On group graded rings satisfying polynomial identities*, Glasgow Math. J., **37**(1995), 205-210

[5] W. D. Munn, *A class of band graded rings*, J. London Math. Soc., (2)**45**(1992), 1-16

[6] D. S. Passman, *Infinite crossed products and group-graded rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **284**(1984), 707-727