ホップ代数の環への作用
(第2回若手研究会報告)

柳井　忠　(Tadashi Yanai)

新居浜工業高等専門学校
yanai@sci.niihama-nct.ac.jp

R を環，G を $\mathrm{Aut}(R)$ の部分群，L を $\mathrm{Der}(R)$ のリー部分代数とします.

$$R^G := \{r \in R | \sigma(r) = R, \forall \sigma \in G\}$$

$$R^L := \{r \in R | d(r) = 0, \forall d \in L\}$$

とすると，よく知られているように R と R^Gの中間環と G の部分群との間にガロア対応が考えられます．また，R と R^Lの中間環と L のリー部分代数の間にも同様に対応が存在します．これらの対応がいつ１対１になるのか？という問題は体のガロア対応の理論の拡張として現在に至るまで多くの人たちによって研究され様々な結果が得られています．Kharchenko は 1970 年代にそれまでの研究を発展させ，半素環におけるガロア対応の理論を構成しています[K]．対応定理の証明には数々の独創的なアイデアが用いられていて，そのアイデアはその後も Kharchenko 自身と後継者達により環論の色々な局面での応用や一般化が考えられてきました．特に 1990 年ごろからはホップ代数の作用を使った拡張が試みられ，興味深い結果が得られています．そこで，今まで得られた結果を使って Kharchenko のガロア対応の理論をホップ代数の作用を用いて拡張し，$\mathrm{Aut}(R)$ の部分群の場合も $\mathrm{Der}(R)$ のリー部分代数の場合も含む対応の理論を構成することはできないか？と考えたのが，この研究の動機となっています.

以下，その概略を述べ最後に参考文献をあげておきます.

1．記号，定義，基本事項

$\mathbf{k}$ で体を表し，以後，空間，代数（多元環），テンソル積は $\mathbf{k}$ 上で定義されているとします．R を素環，Q をその対称的 Martindale 商環 (詳しい定義は[K,M1,M2,P] 等に

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

みることができます)，K をその中心とします．K が体になることはよく知られています．H を有限次分裂 (pointed) ホップ代数とし，余積をΔ，余単位元をε，antipode を S で表します[A,M1,S].

今，H が R に（左から）作用するとすれば，その作用は Q まで拡張されることが分かっています[M1, §6.4]．そこで，smash product algebra と呼ばれる多元環 $Q\#H$ を構成し[M1,§4.1]，Q や H をその部分代数とみることにします．$\emptyset \neq V, W \subseteq Q\#H$ に対して，$V^W := \{v \in V | vw = wv, \forall w \in W\}$ と定義すると，次のことが簡単に計算できます[Y2].

$$R^H = \{r \in R | h \cdot r = \varepsilon(h)r, \forall h \in H\}$$

この式の右辺は invariants といわれる元の集合で，$H = \mathbf{k}G$ の場合は R^Gと，$\mathrm{Char}\, R = p > 0$ で $H = u(L)$（有限次 p-リー部分代数 $L \subseteq \mathrm{Der}(R)$ の p-envelopping algebra）の場合は R^Lと一致します．そこで，$\emptyset \neq U \subseteq R$ と$\emptyset \neq \Lambda \subseteq Q\#H$ に対して次のような写像を考えます.

$$\Phi(U) := (Q\#H)^U, \quad \Psi(\Lambda) := R^\Lambda$$

ΦとΨは R の部分集合と $Q\#H$ の部分集合のあいだに対応を与えますが，ここでは以降 $(Q\#H)^R = K$ という条件を仮定して（このとき H の作用は X-外部的であるといいます），更なる特徴づけを考えます.

2. 対応定理

$\Phi(U)$，$\Psi(\Lambda)$ について次のことが示されます.

補題[Y2,Y3]**.**

(1) $\Phi(R) = K$, $\Psi(R^H) = K\#H$,
(2) $\Psi(K) = R$, $\Psi(K\#H) = R^H$,
(3) $R^H \subseteq U \subseteq R$ に対して $\Phi(U)$ は右 H-余加群代数,
(4) $K \subseteq \Lambda \subseteq K\#H$ に対して $\Psi(\Lambda)$ は有理的完備 (rationally complete) な部分多元環.

従ってΦ, Ψは二つの集合 $\{R^H \subseteq U \subseteq R |\ U$ は有理的完備な部分多元環$\}$ と $\{K \subseteq \Lambda \subseteq K\#H | \Lambda$ は右 H-余加群代数 $\}$ との間に対応を与えていることが分かります.

$H = \mathbf{k}G$ のときは，この対応は本質的にガロア対応を表しています．そこで，この対応で Kharchenko のガロア理論のホップ化を試みようという訳です．具体的には次の問題を解くことが目標になります.

問題. R の R^H を含む部分多元環 U と $K\#H$ の K を含む右 H-余加群部分代数 Λ に対して，

$$\Psi(\Phi(U)) = U, \quad \Phi(\Psi(\Lambda)) = \Lambda \qquad (*)$$

は成立するか？

この問題は今のところ次の場合には肯定的に解かれています.

定理[K,Y2,Y3]. 次の場合 $(*)$ は成立する.

(1) $H = \mathbf{k}G$（G は有限群）のとき (Kharchenko)，
(2) H が余可換で，$K = K^H$ のとき，
(3) $H = H_4, H_9$ のとき.

ここで，H_4, H_9 は Taft algebra と呼ばれる $\mathbf{k}$ 上 n^2 次元のホップ代数 H_{n^2} の $n = 2, 3$ の場合です．更なる考察のために，次の予想をあげておきます.

予想. 次の場合 $(*)$ は成立する.

(1) H が余可換なホップ代数のとき，
(2) $H = H_{n^2}$ $(n \geq 2)$ のとき.

3. 参考文献

まず，ホップ代数関連の書籍として次のものがあります.

[A] 阿部 英一, ホップ代数, 岩波書店, 1977.

[BM] J. Bergen and S. Montgomery (eds.), *Advances in Hopf algebras, Lecture notes in pure and applied mathematics* 158, Dekker, New York, 1994.

[IJM] *Israel journal of mathematics* 72(1)–(2), 1990.

[M1] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings, CBMS Regional Conf. Ser. in Math.* 82, AMS, Providence, R. I., 1993.

[S] M. E. Sweelder, *Hopf algebras*, Benjamin, New York, 1969.

[A,S] はホップ代数に関する標準的な教科書です．[M1] は 1993 年にシカゴで行われたホップ代数の研究集会での連続講演を元に書かれたもので，ホップ代数の基本事

項から最近の結果までが概略的に述べられています．Kharchenko の理論についてもわずかですが§6.4 に記載があります．[BM] はその研究集会の報告集です．[IJM] は雑誌ですが，1989 年にイスラエルで行われたホップ代数の研究集会の特集号になっています．

また，日本語で書かれた入門的な文献として次のものをあげておきます．いずれも予備知識をあまり必要としない読みやすいものです．他にもそのような文献はあるかもしれませんが，手元にあるものを書いておきます．

[D1] 土井 幸雄, 環への種々の作用をホップ代数的に見れば, 数理研講究録 **608** (1987), 21–33.

[D2] ______, ホップ代数２５年, 第１３回可換環シンポジウム（富山）報告集 (1991), 373–385.

[D3] ______, ホップ代数の環への作用, 第３８回代数学シンポジウム報告集 (1993), 31–44.

[T1] 竹内 光弘, ホップ代数とテンソル積, 数理科学 **390** (1995, December), 56–62.

[T2] ______, ホップ代数と有限群論, 数理科学 **397** (1996, July), 60–65.

[T3] ______, ガロア理論とホップ代数, 数学セミナー **35** (1996, ９月号), 32–35.

Kharchenko の理論は

[K] V. K. Kharchenko, *Automorphisms and derivations of associative rings*, Kluwer, Dordrecht, 1991.

に（ロシア語から）英訳されてまとめられていますが，これは誤訳やミスタイプが多く読みにくい文献です.（群の）ガロア理論については

[MP1] S. Montgomery and D. S. Passman, *Galois theory of prime rings*, J.Pure Appl. Algebra **31** (1984), 139–184.

[MP2] ______, *Outer Galois theory of prime rings*, Rocky Mt. J. Math. **14** (1984), 305–318.

[P] D. S. Passman, *Infinite crossed products*, Academic Press, Boston, 1989.

にリライトされたものをみることができます．その他の理論については多くの文献がありますが，ここでは次の６本をあげておきます.

[C] C. L. Chuang, *On composition of derivations of prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 647–652.

[L] C. Lanski, *Differential identities, Lie ideals and Posner's theorem*, Pacific

J. Math. **134** (1988), 275–297.

[M2] S. Montgomery, *Fixed rings of finite automorphism groups, Lecture notes in mathematics* 818, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Mi1] A. Milinski, *Actions of pointed Hopf algebras on prime algebras*, Comm. Algebra **23** (1995), 313–333.

[Mi2] ———, *Operationen punktierter Hopfalgebren auf primen Algebren*, thesis, München, 1995.

[Y1] T. Yanai, $*$-*Differential identities of semiprime rings with involution*, J. Algebra **186** (1996), 264–276.

[M2] は自己同型写像のなす群の fixed subring に関するいくつかの結果や，X-inner, X-outer という概念について参照できます．[C,L,Y1] は differential identity という概念を使った理論の応用や一般化について書かれています．[Mi1] はそのホップ版を与えたもので，[Mi2] では Kharchenko の理論のホップ化についての更なる考察をみることができます.

今回の発表の内容は,

[Y2] T. Yanai, *Correspondence theory of Kharchenko and X-outer actions of pointed Hopf algebras*, Comm. Algebra (to appear).

[Y3] ———, *X-outer actions of pointed Hopf algebras and Galois-type correspondence theory*, preprint.

[Y4] ———, *Kharchenko* のガロア理論とホップ代数の作用, 数理研講究録「ホップ代数と量子群」(to appear).

に書かれています．[Y4] で概略的な説明を今回よりやや詳しく述べています.