Association Scheme の隣接代数

花木 章秀

山梨大学 工学部
e-mail：hanaki@esi.yamanashi.ac.jp

代数的組合せ論において association scheme の隣接代数は重要な役割を果たす。これは群の表現論を研究するものにとっては、群論においてその群環を考えることが重要であることに相当するものと考えられる。隣接代数の研究についてはその多くの場合、係数体としては複素数体、または標数 0 の体が用いられる。これは群の表現の場合に置き換えると通常表現のみを考えていることに相当する。モジュラー表現 (正標数の体上の表現) を考えたら何かいえないだろうか。これが今回の話の動機である。

1　定義

$A_i \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{Z})$, $i = 0, 1, \cdots, d$, とする。$\{A_i \mid i = 0, 1, \cdots, d\}$ が **association scheme** であるとは

(i) $(A_i)_{ab} \in \{0, 1\}$ for any $i \in \{0, 1, \cdots, d\}$ and $a, b \in \{1, 2, \cdots, n\}$

(ii) $(A_0)_{ab} = \delta_{ab}$ for any $a, b \in \{1, 2, \cdots, n\}$

(iii) $(\sum_{i=0}^{d} A_i)_{ab} = 1$ for any $a, b \in \{1, 2, \cdots, n\}$

(iv) ${}^t A_i = A_{i'}$ for some $i' \in \{0, 1, \cdots, d\}$

(v) $\oplus_{i=0}^{d} \mathbf{Z} A_i$ は通常の行列の積に関して閉じている

を満たすものとする。Association scheme を具体的に書き表すときには **関係行列** (relation matrix)

$$R = \sum_{i=0}^{d} i A_i$$

を用いると便利である。また

$$k_i = \sum_{a=1}^{n} (A_i)_{a1}$$

とおき、これを A_i の **valency** という。

$$B = \bigoplus_{i=0}^{d} \mathbf{Z} A_i$$

を $\{A_i \mid i = 0, 1, \cdots, d\}$ の**隣接代数** (adjacency algebra) という。B は $\mathbf{Z}$ 上の代数なので任意の可換環上への係数拡大が考えられる。F を体とし

$$B_F = B \otimes_{\mathbf{Z}} F$$

を F 上の隣接代数という。A_i を B_F で考えるときは $\overline{A_i}$ と書く。

一般には隣接代数は複素数体上で考えられ、また多くの場合可換を仮定する。しかしここでは係数環を正標数の体とし、その代数構造に注目して議論をしてみる。

2 具体例

2.1 群の正則表現

G を有限群とし、$X : G \to \mathrm{Mat}(|G|, \mathbf{Z})$ を正則置換表現とする。このとき $\{X(g) \mid g \in G\}$ は association scheme になる。この時の体 F 上の隣接代数は代数として群環 FG と同型である。

2.2 群の分割 (Schur ring)

G を有限群とする。2.1 と同様に X は正則表現を表すとする。G の分割 $G = \bigcup_{i=0}^{d} T_i$ で $A_i = \sum_{g \in T_i} X(g)$ とおいて $\{A_i\}$ が association scheme になるものを考える。特に分割として共役類への分解を考えるとき、この association scheme を **群 association scheme** という。群 association scheme の体 F 上の隣接代数は群環の中心 $\mathbf{Z}(FG)$ と同型である。

2.3　可移置換群

有限集合 Ω に有限群 G が可移に作用しているとする。このとき G は自然に $\Omega \times \Omega$ にも作用する。この作用の軌道を $\Lambda_0, \Lambda_1, \cdots, \Lambda_d$ とし Ω で添字の付けられた行列 A_i, $i = 0, \cdots, d$, を

$$(A_i)_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{if } (\alpha, \beta) \in \Lambda_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すると、$\{A_i\}$ は association scheme になる。隣接代数は G の置換表現と可換なもの全体になり [1, §2.1]、従って

$$B_F = \mathrm{End}_{FG}({F_H}^G)$$

すなわち **Hecke 代数** となる。ただしここで H は 1 点 $\alpha \in \Omega$ の固定部分群 G_α である。このように群 G と部分群 H で定義される association scheme を $\mathcal{X}(G, H)$ と書くことにする。

Hecke 代数は両側剰余類 $H \setminus G/H$ の群環における和を基底とする代数と考えることもできる。また 2.1 はこの方法の特別な場合と考えることが出来る。

2.4　距離正則グラフ (distanse regular graph)

連結な無向グラフに対し、グラフの点で添字の付けられた行列 A_i, $i = 0, \cdots, d$, を

$$(A_i)_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{if } \partial(a, b) = i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する。ここで $\partial(a, b)$ は自然な距離関数である。$\{A_i\}$ が association scheme になるとき、このグラフを**距離正則グラフ**という。このとき A_i は A_1 の有理係数多項式で表され、したがって隣接代数は標数 0 の体 K 上で $B_K = K[X]/(f(X))$, f は有理係数多項式, と表される。f は重根を持たないことが知られており、K が十分大きな体 (f の分解体) なら代数として $B_K \cong K \oplus K \oplus \cdots \oplus K$ である。しかし正標数の体上では $\overline{A_i}$ は必ずしも $\overline{A_1}$ の多項式で表される訳ではない。

3　半単純性

ここでは F 上の隣接代数の半単純性を議論する。次の 2 つのことが基本である。n は隣接行列のサイズを表すものとする。

命題 1. [5, Theorem 4.1.3] $\mathrm{char}F = p > 0$ とする。$p \nmid n$ かつすべての $i \in \{0, 1, \cdots, d\}$ に対して $p \nmid k_i$ であれば B_F は半単純である。

命題 2. $\mathrm{char}F = p > 0$ とする。$p \mid n$ なら B_F は半単純でない。

証明. $F(\sum_{i=0}^{d} \overline{A_i})$ がべき零イデアルだから明らか。 $\square$

群環の場合は Maschke の定理より半単純であることと $p \nmid n$ であることが同値である。隣接代数についても同様の定理が成り立つのではないかと期待したが、以下のように反例がある。

例 3. 四元数群 $G = Q_8 = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c,\ c^2 = 1,\ [a, b] = c \rangle$ を考える。分割

$$G = \{1\} \cup \{c\} \cup \{a, b, ab\} \cup \{ac, bc, abc\}$$

を考えれば 2.2 の方法で association scheme が定義できる。$\mathrm{char}F = 3$ とすると B_F は半単純ではない。

例 4. 距離正則グラフの一つに Petersen's graph というものがある (10 点上のグラフ)。これに対し $\mathrm{char}F = 3$ とすると B_F は半単純ではない。

$n \leq 10$ の範囲では反例はこの二つしかないが次のようにしていくらでも反例が作れる。

例 5. G を有限群とし P をその シロー p 部分群とする。$P \backslash G$ への G の作用を考え 2.3 の方法で association scheme $\mathcal{X}(G, P)$ を定義する。$n = |G : P|$ なので n は p では割り切れない。標数 p の体 F 上の隣接代数は $\mathrm{End}_{FG}({F_P}^G)$ である。$\mathrm{End}_{FG}({F_P}^G)$ が半単純であることと ${F_P}^G$ が完全可約であることは同値 [4, Theorem 1] であり、この同値な条件が満たされるとき G を p-radical 群という。p-radical 群は非常に特殊な群であり、特に p-可解であることが知られている [3]。したがって例えば p-可解でない群 G に対して上のように association scheme を定義すれば Maschke の定理の一般化に対する反例となる。

例 3 は最小の非 p-radical 群 $\mathrm{SL}(2, 3)$ からこのようにして作られるものとしてとらえることも出来る。

以上のように隣接代数の半単純性の判定は Maschke の定理が成り立つ有限群の群環の場合のように簡単ではないように感じられる。Maschke の定理に対応する結果として次が得られる。

命題 6. $p \nmid n$ であることと自明な表現 $\overline{A_i} \mapsto \overline{k_i}$ を含む B_F のブロックが単純であることは同値である。

証明. $x = \sum_{i=0}^{d} \overline{A_i}$ とおく。

$p \mid n$ のときは Fx が根基に含まれるイデアルでこれを表現加群とする表現は自明なものである。したがって自明な表現を含むブロックは単純ではない。

$p \nmid n$ のときは $e = n^{-1}x$ が中心的原始べき等元で eB_F は自明な表現を含むブロックである。これは 1 次元なので明らかに単純である。 □

4 局所環

有限 p-群の標数 p の体上での群環は局所環になる。隣接代数についても同様のことがいえるだろうか。例を調べると $n \leq 19$ ではこのことは成り立つ。

p-群の群環の場合を真似て、簡単な事実から述べる。

命題 7. $n = p^e$ とし $\mathrm{char}F = p$ とする。次は同値である。

(i) 隣接代数 B_F は局所環

(ii) $\oplus_{i=1}^{d} F\left(\overline{A_i} - k_i\overline{A_0}\right)$ は B_F の Jacobson 根基

(iii) $\left(\overline{A_i}\right)^{p^e} = k_i\overline{A_0}$

(iv) B_F の既約表現は $\overline{A_i} \mapsto \overline{k_i}$ のみ。

このことから隣接代数が局所環になれば、association scheme の構造に関するいくらかの情報が得られることが期待される。

本質的に有限群から定義されるものについては次のように先に述べた予想は成り立つ。

命題 8. $\mathrm{char}F = p$ とする。G を有限群とし H を $|G:H|$ が p べきである G の部分群とする。このとき association scheme $\mathcal{X}(G,H)$ の隣接代数 B_F は局所環である。

証明. 加群が直既約であることとその自己準同型環が局所環であることは同値である [2, Theorem I.5.10] から、${F_H}^G$ が直既約であることを示せばよい。$|G:H| = p^a$ とする。H のシロー p-部分群を Q とすれば ${F_H}^G$ の任意の直既約直和因子は Q-射影的であり、その次元は p^a で割り切れる [2, Theorem IV.7.5]。$\dim_F {F_H}^G = p^a$ であるから ${F_H}^G$ 自身が直既約である。 □

命題 9. $\mathrm{char}F = p$ とする。G を p-群とし、G の適当な分割から 2.2 の方法で作った association scheme の隣接代数 B_F は局所環である。

証明. B_F は局所環 FG の単位元を共有する部分代数なので、また局所環である。 $\square$

系 10. Cyclotomic scheme $\mathrm{Cyc}(p^a, d)$ の体 F, $\mathrm{char}F = p$, 上の隣接代数 B_F は局所環である。特に $\mathrm{Cyc}(p, d)$ のとき B_F は代数として多項式環の剰余環 $F[X]/(X^{d+1})$ に同型である。

証明. $\mathrm{GF}(p^a)^\times$ の位数 $t = (p^a - 1)/d$ の部分群を H とし加法群 $\mathrm{GF}(p^a)$ への自然な作用を考える。G を $\mathrm{GF}(p^a)$ と H の半直積とし $\mathcal{X}(G, H)$ を 2.3 のように定義すればこれが $\mathrm{Cyc}(p^a, d)$ となり、命題 8 より B_F は局所環である。

$\mathrm{Cyc}(p, d)$ を考える。$B_F \cong \mathrm{End}_{FG}({F_H}^G)$ だから ${F_H}^G$ の構造がわかればよい。${F_H}^G$ は自明な加群 F_G の射影被覆に同型であり、群の構造からこれは uniserial でその Loewy 列は $\{S_i \mid i = 0, 1, \cdots, t\}$, $S_0 = F_G$, を既約加群として

$$\overbrace{\overbrace{S_0S_1\cdots S_t}\cdots\overbrace{S_0S_1\cdots S_t}}^{d\text{ times}}S_0$$

である。したがってその自己準同型は top の S_0 を各既約成分 S_0 へ移すものとなり、B_F は $F[X]/(X^{d+1})$ に同型である。 $\square$

現在知られている素数点上の association scheme は cyclotomic scheme と同じ構造定数をもつものだけである。それ以外のものの可能性を調べる上で、このような議論が役に立つことを期待している。

一般に n が p べきではなくても B_F が局所環になることはある。例えば p ブロックが主ブロックのみであるような群に対して群 association scheme を考えれば、B_F は局所環である。($\mathbf{Z}(FG)$ における 1 の原始べき等元分解と群環のブロック分解は一対一に対応している。) そのような最小の例は対称群 S_3, $p = 3$, である。

Acknowlegement

この研究に関して宮本泉先生 (山梨大) に多くの助言を頂いた。また具体例の計算に関しては宮本先生の学生である金井龍夫君による部分が多い。

References

[1] E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics I : Association Schemes. Benjamin / Cummings, Menlo Park CA (1984)

[2] H. Nagao and Y. Tsushima, Representations of Finite Groups, Academic Press, San Diego CA (1987) (有限群の表現, 裳華房)

[3] T. Okuyama, p-radical groups are p-solvable. Osaka J. Math. **23** 467–469, 1986.

[4] Y. Tsushima, On p-radical groups. J. Alg. **103** 80–86, 1986.

[5] P.-H. Zieschang, An Algebraic Approach to Association Schemes. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1996)