直交群の両側剰余類

藤崎 竜也 (九州大学大学院数理学府)

q を odd prime power とする。$\mathbf{F}_q$ 上の n 次元ベクトル空間の上の与えられた非退化な 2 次形式 f に対する Witt index 0 (すべての nonzero vector が f に関して non-singular である) の 2 次元部分空間の集合を $\mathbf{L}$ と置き、f に関する直交群を $\mathbf{L}\times\mathbf{L}$ に作用させた際の orbit を具体的に表すことを考える。

この問題は行列表示を使えば、以下の群 G とその部分群 H に関する両側剰余類を記述する事と同じである：

$$\begin{aligned}
X_0 &\ :\ \mathbf{F}_q \text{ 係数の 2 次対称行列},\ -|X_0| : \text{nonsquare in } \mathbf{F}_q,\\
Y_0 &\ :\ \mathbf{F}_q \text{ 係数の } (n-2) \text{ 次対称行列},\ |Y_0| \neq 0\\
G &:= \left\{ S \in GL(n,q) \;\middle|\; S \begin{pmatrix} X_0 & \\ & Y_0 \end{pmatrix} {}^tS = \begin{pmatrix} X_0 & \\ & Y_0 \end{pmatrix} \right\}\\
&\quad (\text{ここで、}{}^tS \text{ は } S \text{ の転置行列を意味する})\\
H &:= \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & D \end{pmatrix} \in G \right\} \begin{pmatrix} A : 2 \text{ 次正方行列}, \\ D : (n-2) \text{ 次正方行列} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$H_1 := \{A \in GL(2,q) \mid AX_0\,{}^tA = X_0\}$,$H_2 := \{D \in GL(n-2,q) \mid DY_0\,{}^tD = Y_0\}$, と置けば、$H$ は $H_1 \times H_2$ と同型である。

この G,H について次の結果が得られた:

定理 1.

$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$ (A,B,C,D はそれぞれ $2\times 2, 2\times(n-2), (n-2)\times 2, (n-2)\times(n-2)$ の行列とする) に対し、$(\mathrm{rank}B,\ -|BY_0\,{}^tB|,\ -|X_0 - BY_0\,{}^tB|)$ を与える写像を $g : S \mapsto g(S)$ とする。このとき集合 $g^{-1}(r,k_1,k_2)$ は空集合でなければ、G の H による両側剰余類のいくつかの和集合になる。以下の場合を除き、集合 $g^{-1}(r,k_1,k_2)$ はそれ自身両側剰余類をなす。また全ての両側剰余類はこの形で表される。

(i) $(r,k_1,k_2) = (1,0,\nu)$ ならば、$g^{-1}(1,0,\nu)$ は H による両側剰余類の 2 つの和集合であり、それらは以下の集合となる:

$$\left\{ S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in g^{-1}(1,0,\nu) \;\middle|\; \begin{matrix} {}^tBX_0^{-1}B = {}^t\mathbf{b}\mathbf{b} \\ {}^\exists\mathbf{b} : \text{nonzero } (n-2)\text{-row vector} \end{matrix} \right\},$$

$$\left\{ S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in g^{-1}(1,0,\nu) \;\middle|\; \begin{matrix} {}^tBX_0^{-1}B = \nu\,{}^t\mathbf{b}\mathbf{b} \\ {}^\exists\mathbf{b} : \text{nonzero } (n-2)\text{-row vector} \end{matrix} \right\},$$

ここで、ν は $\mathbf{F}_q$ のある nonsquare element.

(ii) 相異なる $a, a' \in \mathbf{F}_q$ が存在し、

$$\nu x^2 + (k_2 - k_1 - \nu)x + k_1 = \nu(x-a)(x-a'),$$

となるとき、$g^{-1}(i,k_1,k_2)$ は H による両側剰余類の２つの和集合であり、それらは以下の集合となる:

$$\left\{ S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in g^{-1}(i,k_1,k_2) \;\middle|\; \begin{array}{c} (a'-a)^{-1}(BY_0\,{}^tB - aX_0) = {}^t\mathbf{b}\mathbf{b} \\ {}^\exists\mathbf{b} : \text{nonzero 2-row vector} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in g^{-1}(i,k_1,k_2) \;\middle|\; \begin{array}{c} (a'-a)^{-1}(BY_0\,{}^tB - aX_0) = \nu\,{}^t\mathbf{b}\mathbf{b} \\ {}^\exists\mathbf{b} : \text{nonzero 2-row vector} \end{array} \right\},$$

定理１の証明を簡単に述べる。まず、前半の $g^{-1}(i,k_1,k_2)$ が両側剰余類の和集合であること、つまり、$HSH = HS'H$ ならば、$g(S) = g(S')$ であることは容易に分かる。後半を証明する上で、以下の２つの補題を示した。

補題 1. $S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $S' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in G$ とする。このとき、$HSH = HS'H$ であるための必要十分条件は

$${}^\exists A_0 \in H_1, {}^\exists D_0 \in H_2 \text{ such that } B' = A_0 B D_0$$

となることである。

補題 2. S, S' を 補題１で与えた行列表示を持つ行列とする。$g(S) = g(S') \neq (1,0,\nu)$ (つまり、(i) の条件を満たさない) ならば、

$${}^\exists A_0 \in H_1, {}^\exists D_0 \in H_2 \text{ such that } B' = A_0 B D_0$$

であるための必要十分条件は

$${}^\exists A_0 \in H_1 \text{ such that } A_0 (BY_0\,{}^tB)\,{}^tA_0 = B'Y_0\,{}^tB'$$

となることである。

上の２つの補題より、$g(S) \neq (1,0,\nu)$ である S の集合の両側剰余類を求めることは、２次対称行列の集合の上に作用する群 H_1 についての軌道を求めることに帰着して考えることができる。一方、$g(S) = (1,0,\nu)$ であるものについては、補題１より、定理の (i) が示される。

２次対称行列の集合の上に作用する群 H_1 は、$\mathbf{F}_q^3$ 上の直交群 $O(3,q)$ の部分群 $O(3,q)_{x_0} (\simeq O^-(2,q))$ の index 2 の部分群と同型である。ここで、$x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ とは $O(3,q)$ を２次形式 $f_0(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_3^2$ に関する直交群とみた時の $f_0(x_0)$: nonsquare in $\mathbf{F}_q$ となる vector である。このことを使い、定理の (ii)、および、(i),(ii) 以外の $g^{-1}(i,k_1,k_2)$ がそれ自身両側剰余類であることが示される。

さて、この研究の大きな問題として、G の H による permutation character 1_H^G が multiplicity-free であるかを調べることがある。もし、任意の $S \in G$ に対して、S と S^{-1} が同じ H による両側剰余類に入るならば、 1_H^G は multiplicity-free である。このことに関して、次の結果が得られた:

定理 2.

$g^{-1}(i,k_1,k_2)$ を空でないものとする。$g^{-1}(i,k_1,k_2)$ が定理 1. の (ii) の条件を満たすものでなければ、$S \in g^{-1}(i,k_1,k_2)$ に対して、$HS^{-1}H = HSH$ である。

$g^{-1}(i,k_1,k_2)$ を 相異なる $a, a' \in \mathbf{F}_q$ が存在し、$\nu x^2 + (k_2 - k_1 - \nu)x + k_1 = \nu(x-a)(x-a')$ となるものとする。とくに $a' \neq 1$ とする。このとき $S \in g^{-1}(i,k_1,k_2)$ に対して、$HS^{-1}H = HSH$ となるための必要十分条件は $1-a'$: square となることである。

定理 2 の証明は、$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$ の inverse が $\begin{pmatrix} X_0\,{}^tAX_0^{-1} & X_0\,{}^tCY_0^{-1} \\ Y_0\,{}^tBX_0^{-1} & Y_0\,{}^tDY_0^{-1} \end{pmatrix}$ となることから証明することができる。

また、G を含む群として、以下の群をとる:

$$\overline{G} := \left\{ S \in GL(n,q) \;\middle|\; S \begin{pmatrix} X_0 & \\ & Y_0 \end{pmatrix} {}^tS = \lambda \begin{pmatrix} X_0 & \\ & Y_0 \end{pmatrix} \; {}^\exists\lambda \in \mathbf{F}_q^\times \right\}$$

この群に対して、以下のことが示された。

定理 3.

n: even とする。$G \leq \widetilde{G} \leq \overline{G}$ を満たす群 $\widetilde{G}$ に対して、

$$\widetilde{H} := \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & D \end{pmatrix} \in \widetilde{G} \right\} \begin{pmatrix} A : 2 \text{ 次正方行列}, \\ D : (n-2) \text{ 次正方行列} \end{pmatrix}$$

とする。もし、

$${}^\exists T \in \widetilde{G} \text{ such that } T \begin{pmatrix} X_0 & \\ & Y_0 \end{pmatrix} {}^tT = \lambda \begin{pmatrix} X_0 & \\ & Y_0 \end{pmatrix} \text{ for some nonsquare } \lambda$$

ならば、任意の $S \in \widetilde{G}$ に対して、$\widetilde{H}S^{-1}\widetilde{H} = \widetilde{H}S\widetilde{H}$ がなりたつ。つまり、$1_{\widetilde{H}}^{\widetilde{G}}$ は multiplicity-free である。(もちろん、$\widetilde{G} = \overline{G}$ であるときも成り立つ。)