アソシエーションスキームの指標

花木 章秀 (信州大学)

March 11, 2001

アソシエーションスキームの理論はある意味で群論の拡張である。群論において、その表現論は重要であり表現論無しでは証明が困難な結果も多くある。例えば Frobenius 核の存在定理や Burnside の $p^a q^b$ 定理などがそうである。ここではアソシエーションスキームの理論において、やはり重要であると思われる表現論、特に指標の理論についての話題をいくつか考える。一般論については 坂内 – 伊藤 [1] などに詳しく出ているが、この本は可換の場合のみを扱っている。可換なアソシエーションスキームは応用上重要である。またその隣接代数には二つの代数構造が入ることからある意味での双対性を持っており、多くの結果が得られている。しかしここではより一般に可換を仮定しない場合を考える。可換でない場合にも二つの代数構造を考えることは出来るが、その一方は常に可換であり、よい双対性はない。可換を仮定しない場合の文献は多くはないが Zieschang [7] に基本的なことは書いてある。ここでは [7] に書かれていないいくつかの結果と、それに関連するいくつかの問題について解説する。

1 定義と記号

X を有限集合とする。$X \times X = \bigcup_{g \in G} g$ を $X \times X$ の分割とする。$g \in G$ に対して隣接行列 σ_g を X で添字の付けられた行列で

$$(\sigma_g)_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{if } (x,y) \in g, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

と定義する。(X, G) がアソシエーションスキームであるとは

(1) $1 = \{(x,x) \mid x \in X\} \in G$ (σ_1 は単位行列)

(2) $g^* = \{(y,x) \mid (x,y) \in g\} \in G$ for $g \in G$ (σ_{g^*} は σ_g の転置行列)

(3) $\sigma_g \sigma_h = \sum_\ell a_{gh\ell} \sigma_\ell$ for some integer $a_{gh\ell}$ (積は行列の積)

が成り立つこととする。このとき単に G がアソシエーションスキームであるともいう。(3) の積が可換のときアソシエーションスキームは可換であるという。条件 (3) より任意の単位元を持つ可換環 R 上の代数

$$RG = \bigoplus_{g \in G} R\sigma_g$$

が考えられる。これを R 上 G の隣接代数という。アソシエーションスキームの表現とは隣接代数 RG の表現のことをいう。ここでは主に $R = \mathbb{C}$ の場合を考える。

定理 1.1 ([7, Theorem 4.1.3]). $\mathbb{C}G$ は半単純代数である。

この定理から表現が同値であることとその指標が一致することは同値となり、$\mathbb{C}$ 上の表現論は指標の理論とある意味で同等であることが分かる。$\mathrm{Irr}(G)$ で G の複素既約指標の集合を表すこととする。

定義より σ_g は各行各列に同じ数の 1 を含むことが分かる。その数を n_g と表し g の valency と呼ぶ。また $S \subseteq G$ に対して $n_S = \sum_{g\in S} n_g$ とする。特に $n_G = |X|$ である。これをアソシエーションスキームの位数という。隣接行列に対しても同様に $\sigma_S = \sum_{g\in S}\sigma_g$ とする。σ_1 は単位行列であり隣接代数の単位元なので、これを単に 1 とも書く。

σ_g に σ_g 自身を対応させれば、それは一つの表現になる。これを標準表現という。標準表現の指標を標準指標といい γ とかく。このとき明らかに

$$\gamma(\sigma_g) = \begin{cases} n_G, & \text{if } g = 1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。標準指標の既約分解

$$\gamma = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} m_\chi \chi$$

を考え m_χ を χ の重複度という。指標に関して次の直交関係が成り立つ。

定理 1.2 (直交関係 [7, Theorem 4.1.5]). $\chi, \varphi \in \mathrm{Irr}(G)$ に関して

$$\frac{1}{n_G}\sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}\chi(\sigma_g)\varphi(\sigma_{g^*}) = \delta_{\chi\varphi}\frac{\chi(1)}{m_\chi}$$

群の指標の場合はもう一つの直交関係が成り立つが、アソシエーションスキームについてはそのような関係はない。ただし可換の場合には群と同様にもう一つの直交関係もある。

2 素数位数アソシエーションスキーム

アソシエーションスキームの研究において、原始的なアソシエーションスキームは重要である。それは有限群論における単純群に相当する。一番簡単な有限単純群は素数位数巡回群である。アソシエーションスキームについても素数位数のものは原始的である。しかしこの場合についてさえも、その分類は困難である。次の予想がある。

予想 1. 素数位数アソシエーションスキームの隣接代数は基底の対応も含めて cyclotomic スキームの隣接代数と同型なものに限る。

cyclotomic スキームとは素数点上の可移置換群から得られるアソシエーションスキームである。特に cyclotomic スキームは可換であるので、次の弱い予想もある。

予想 2. 素数位数アソシエーションスキームは可換である。

ここではこの予想に対する指標を使った一つのアプローチを紹介する。まず次の定理が成り立つ。p は常に素数を表すとする。

定理 2.1 ([2]). F を標数 p の体とし G を位数 p べきのアソシエーションスキームとする。このとき FG は局所環である。

Proof. 証明の概略を述べる。FG が局所環になるための必要十分条件はべき等元が単位元のみであることである。(K,R,F) を splitting p-modular system とすると FG のべき等元は RG のべき等元に持ち上げ可能である。e を RG のべき等元とすると

$$e = \sum_{g \in G} a_g \sigma_g \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

となる。e のランクを m とすると、両辺のトレースをとって $n_G a_1 = m$ であるから $a_1 = m/n_G$ である。ここで $e \in RG$ より $a_1 \in R$。したがって n_G が p べきであることに注意して $m = n_G$、すなわち $e = 1$ である。 □

この定理から σ_g の F における固有値は n_g のみであることが分かる。したがって $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $\chi(\sigma_g)$ は F において $n_g\chi(1)$ と等しい。今 $n_G = p$ と仮定すれば $0 < n_g < p$, $0 < \chi(1) < p$ なので $n_g\chi(1) \neq 0$ (in F) である。したがって標数 0 でも $\chi(\sigma_g) \neq 0$ である。次の予想が正しければ G は可換となる。

予想 3 (Burnside の定理の拡張). $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $\chi(1) > 1$ ならば、ある $g \in G$ があって $\chi(\sigma_g) = 0$ となる。

3 剰余スキームの指標

有限群の理論においては部分群や剰余群を考えて帰納法を利用することはよく行われることである。しかしアソシエーションスキームの理論においてはそのための道具が揃っているとは言いがたく、帰納法などを考えることは難しい。帰納法が有効に使われた例を見付けるのが難しいくらいであるが、例えば平坂 – Muzychuk – Zieschang [6] の Sylow の定理の拡張がある。ここでは closed subset と剰余スキームを定義し、剰余スキームの指標に関して最近得られた結果とそれに関連する問題を紹介する。

(X,G) をアソシエーションスキームとする。$H \subseteq G$ が closed subset であるとは $n_H^{-1}\sigma_H$ が $\mathbb{C}G$ のベキ等元であることとする。更に H が normal closed subset であるとは $n_H^{-1}\sigma_H$ が $\mathbb{C}G$ の中心的ベキ等元であることとする。これは自然に有限群の部分群、正規部分群の概念の拡張になっている。また [7] の定義とは異なるが同値な定義である。H が G の closed subset であるときベキ等元 $n_H^{-1}\sigma_H$ を e_H と書く。

$\chi(\sigma_g) = n_g$ とすると χ は 1 次の指標になる。これを自明な指標といい 1_G と書く。また任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対してそれに対応する $\mathbb{C}G$ の中心的ベキ等元を e_χ と書く。

$g,h \in G$ に対して

$$gh = \{\ell \in G \mid a_{gh\ell} \neq 0\}$$

とする。$S,T \subseteq G$ に対しても

$$ST = \bigcup_{g \in S, h \in T} gh$$

とする。また $x \in X$ と $g \in G$ に対して

$$xg = \{y \in X \mid (x,y) \in g\}$$

とする。$S \subseteq G$ に対しても上と同様に

$$xS = \bigcup_{g \in S} xg$$

とする。これらは complex product と呼ばれ、隣接代数における積とは異なる。この記号を用いると H が closed subset であることは $HH \subseteq H$ と同値で、更に normal closed subset であることは $gH = Hg$ が任意の $g \in G$ に対して成り立つことと同値である。

H を closed subset とするとき剰余スキームを次のように定義する。$X/H = \{xH \mid x \in X\}$, $G/H = \{g^H \mid g \in G\}$ とする。ただしここで $g^H = \{(xH, yH) \mid (x, y) \in g\}$ である。このとき $(X/H, G/H)$ はアソシエーションスキームになる。これを G の H による剰余スキームと呼ぶ。

定理を記述するためにもう少し記号を定義する。$\chi, \chi' \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して

$$(\chi, \chi')_G = \delta_{\chi\chi'}$$

と定義し、これを一般の指標に線形に拡張する。すなわち

$$\left(\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} a_\chi \chi, \sum_{\varphi \in \mathrm{Irr}(G)} b_\varphi \varphi \right)_G = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} a_\chi b_\chi$$

である。G の指標 χ を H の指標と思ったものを $\chi\!\downarrow_H$ と書く。また $\mathbb{C}H$-加群 W に対して $\mathbb{C}G$-加群 $W\!\uparrow^G = W \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}G$ が定義できる。その指標を $\varphi\!\uparrow^G$ と書く。

定理 3.1 ([3]). H を G の normal closed subset とする。$\pi : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}[G/H]$ を

$$\pi(\sigma_g) = \frac{n_g}{n_{g^H}} \sigma_{g^H}$$

で定義すれば π は代数準同型である。したがってこれを通して $\mathbb{C}[G/H]$-加群を $\mathbb{C}G$-加群と思うことが出来る。

定理 3.2 ([3]). H を G の normal closed subset とする。$\mathrm{Irr}(G/H) \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ と見るとき、次は同値である。

(1) $\chi \in \mathrm{Irr}(G/H)$,

(2) $\chi(\sigma_h) = n_h \chi(1)$ for all $h \in H$,

(3) $\chi\!\downarrow_H = \chi(1) 1_H$,

(4) $(\chi\!\downarrow_H, 1_H)_H \neq 0$,

(5) $(\chi, 1_H\!\uparrow^G)_G \neq 0$,

(6) $\chi(e_H) \neq 0$,

(7) $e_\chi e_H \neq 0$, and

(8) $e_\chi e_H = e_\chi$.

これによって自明な指標に関しては色々なことが分かるが、一般の指標に関しては難しい。次の問題をあげておく。

問題 4. アソシエーションスキームの表現に関して Clifford の定理に相当するものを考えよ。

問題 5. 既約とは限らない指標 χ, φ に対して、その指標の値から $(\chi, \varphi)_G$ を求めよ。

問題 6. 指標 χ の既約性を、その指標の値から決定せよ。(問題 5 が出来れば $(\chi, \chi)_G = 1$ が必要十分になる。)

アソシエーションスキームの指標の理論では重複度が重要な役割をもっている。重複度に関して次が成り立つ。

命題 3.3. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $m_\chi \geq \chi(1)$ である。

この結果から次のような問題が考えられる。

問題 7. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $m_\chi = \chi(1)$ となるのはいつか。

重複度は直交関係を使って指標表から読み取ることが出来る。したがってこの問題は指標表から何が分かるかという問題に関連して興味ある問題であるように思われる。この問題に関して部分的な解と一般の場合の予想を述べる。$\mathrm{Irr}(G/H) \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ と見たとき、重複度は変わらないことに注意しておく。

アソシエーションスキーム G が thin であるとは、任意の $g \in G$ に対して $n_g = 1$ であることをいう。thin なアソシエーションスキームは本質的には有限群である。一般のアソシエーションスキーム G に対して G/H が thin であるような最小の closed subset H が存在する。これを G の thin residue といい $\mathbf{O}^\vartheta(G)$ と書く。$G/\mathbf{O}^\vartheta(G)$ は群であるからその交換子群が考えられる。$D(G)$ を $D(G)/\mathbf{O}^\vartheta(G)$ が $G/\mathbf{O}^\vartheta(G)$ の交換子群であるように定める。群の指標に関しては $m_\chi = \chi(1)$ が成り立っているが、逆に次が予想される。

予想 8. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $m_\chi = \chi(1)$ であることと $\chi \in \mathrm{Irr}(G/\mathbf{O}^\vartheta(G))$ であることは同値である。

この予想に関して次の部分的な解がある。可換を仮定するとこれによって上の予想は正しいことになる。

命題 3.4. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $m_\chi = \chi(1)$=1 であることと $\chi \in \mathrm{Irr}(G/D(G))$ であることは同値である。

この節の最後にもう一つの予想を述べる。G の (既約とは限らない) 指標 χ に対して

$$K(\chi) = \{g \in G \mid \chi(\sigma_g) = n_g \chi(1)\}$$

とおく。このとき $K(\chi)$ は G の closed subset であることは分かる。しかし次は分かっていない。

予想 9. $K(\chi)$ は G の normal closed subset である。[1]

この予想を考える理由は色々とあるように思うが、例えば次の予想はこれが正しければ正しい。

予想 10. 二つの normal closed subset の共通部分は normal closed subset である。

この予想も自明なように思われるが証明されていないようである。$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ の場合に予想 9 が正しく、更に予想 10 も正しければ予想 9 は一般に正しい。

[1] 予想 9 には反例が見付かりました。(2001/3/13)

4 複素共役と代数的共役

最近次の結果が得られた。

定理 4.1. χ をアソシエーションスキーム G の指標とするとき、任意の $g \in G$ に対して

$$\chi(\sigma_{g^*}) = \overline{\chi(\sigma_g)}$$

ここで右辺は複素共役を表す。

これは可換の場合などには明らかであるが、一般の場合にはそれほど明らかではなかった。なぜならば可換の場合や thin の場合 (有限群の場合) にはすべての隣接行列が正規行列であり、それだけから導かれるのに対し、一般の場合には隣接行列は対角化可能ですらないからである。一般の場合の証明は一つの隣接行列だけを見るのではなく、その全体を見る必要がある。

これに関連して次の問題が考えられる。G をアソシエーションスキームとして K を $\mathbb{Q}G$ の分解体とする。$\tau \in Gal(K/\mathbb{Q})$ を固定する。$g \in G$ に対して

$$\chi(\sigma_g)^\tau = \chi(\sigma_{g^\tau}), \quad \text{for any } \chi \in \mathrm{Irr}(G)$$

となる $g^\tau \in G$ は存在するか ? 定理 4.1 は τ が複素共役のときに、これが正しいことを示している。また有限群の指標に関しては分解体 K を円分体に取ることができ、さらに σ_g のすべての固有値が 1 のべき根であることを利用して証明される。しかし一般のアソシエーションスキームに対しては反例がある。どのようなときにこれが成り立つのかに興味がある。これは次の問題にも関連すると思われる。

問題 11 (坂内 – 伊藤 [1, p.123]). $\mathbb{Q}G$ の最小分解体は円分体であるか ?

この問題は可換、あるいはより強く対称であることを仮定しても未解決である。類似の問題として次もある。

問題 12. 隣接代数の分解体を (標数 0 以外の場合も含めて) 一般的に求めよ。

現在までに位数 28 までのアソシエーションスキームが分類されている [4]。その指標表については位数 19 までの全てと位数 20 のほとんどが計算されている [5] (2001/3/9 現在) 。

References

[1] E. Bannai and T. Ito, “Algebraic Combinatorics I : Association Schemes”, Benjamin–Cummings, Menlo Park CA, 1984.

[2] A. Hanaki, Locality of a modular adjacency algebra of an association scheme of prime power order, to appear in Arch. Math.

[3] A. Hanaki, Representations of association schemes and their factor schemes, preprint.

[4] A. Hanaki, I. Miyamoto, Classification of association schemes of small order, http://kissme.shinshu-u.ac.jp/as/.

[5] A. Hanaki, Charater tables of association schemes, http://kissme.shinshu-u.ac.jp/as/.

[6] M. Hirasaka, M. Muzychuk, P.-H. Zieschang, Sylow's Theorem for association schemes, preprint.

[7] P.-H. Zieschang, "An Algebraic Approach to Association Schemes", Springer-Verlag, Berlin/New York, 1996.