

Cline-Parshall-Scott は、代数群及び Lie 代数の表現論から最高ウェイト圏なる圏論的な概念を抽出し、更にそれをアルチン代数を用いて研究する為に準遺伝環を導入した [CPS1,2]。準遺伝環はアルチン代数の表現論の観点からも興味深く、Dlab-Ringel を先駆けとして盛んに研究されている [DR1,2,3]。一方整環の表現論においては、可換環論における正規化の概念の非可換類似物である overorder, overring の概念が重要な役割を果たす。 Λ の overring Γ からは自然に $\text{lat } \Lambda$ の部分圏 $\text{lat } \Gamma$ が得られるが、この対応を圏論的に定式化する事により rejection という概念が得られる [I1,2]。rejection は特に有限表現型 order の研究に効果的に用いられるが [I3]、その萌芽は既に Drozd-Kirichenko-Roiter [DKR][DK1,2] に続く土方-西田の Bass order 及び有限表現型局所 order の理論にある [HN1,2,3]。本文の目的の一つは、加群の近似理論 [AS2] の観点から見ると、準遺伝環と rejection が実は深く関係している事を注意する事にあり、もう一つの目的は、その応用として二つの忘れられかけた古い問題に解答を与える事にある [I4,5]。片方は 30 年前に M. Auslander が導入したアルチン代数の表現次元に関するものであり [A1]、もう片方は 25 年前に L. Solomon が導入した order の Solomon ゼータ関数に関するものである [S1,2]。一見何の関係もないこれら 2 つの話題が、rejection を通して関係してくるのである。

鍵となる図式は次の様なものであり、0 次元と 1 次元の平行世界を表している。1 章で大体図の上部、2 章で下部を扱い、右部が 3 章にて、左部が 4 章で用いられる。

1 次元の世界	0 次元の世界
{order Λ の overring}	{アルチン代数 Λ の剰余環}
\updownarrow	\updownarrow
{ $\text{lat } \Lambda$ の rejective 部分圏}	{ $\text{mod } \Lambda$ の rejective 部分圏}
\cap	\cap
{ $\text{lat } \Lambda$ の右 rejective 部分圏}	{ $\text{mod } \Lambda$ の右 rejective 部分圏}

以下では加群は全て左加群を意味するものとする。環 Λ に対して J_Λ で Λ の Jacobson radical を表す。 $\text{mod } \Lambda$ (resp. $\text{pr } \Lambda$) で有限生成 Λ -加群 (resp. 有限生成射影 Λ -加群) の圏を表す。また、加法圏 \mathcal{C} に対して $\text{ind } \mathcal{C}$ で \mathcal{C} の直既約対象の同型類全体を表す。

¹ The detailed version of this paper will be submitted elsewhere.

1 overorder と rejection

以下、 R を完備離散付値環とし K をその商体とする。基本的な例としては $(R, K) = (\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ や $(k[[x]], k((x)))$ がある。 R -代数 Λ が R -order であるとは、 R -加群として有限生成射影的である事を意味する [CR]。この時、 Λ は有限次 K -代数 $A := \Lambda \otimes_R K$ の部分環とみなされる。以下では特に断らない限り A は半単純であると仮定する。 R -order Λ 上の加群 L が Λ -lattice であるとは、 R -加群として有限生成射影的である事を意味する。 Λ -lattice の圏を $\text{lat } \Lambda$ で表す。 $(\)^* = \text{Hom}_R(\ , R)$ は $\text{lat } \Lambda$ と $\text{lat } \Lambda^{op}$ の間の duality を与えるが、 $\text{in } \Lambda := (\text{pr } \Lambda^{op})^*$ を入射 Λ -lattice の圏と呼ぶ。 $\text{lat } \Lambda$ においては、直既約分解に関する Krull-Schmidt の定理が成立し、更に Auslander-Reiten 列の存在定理が成立する [A2]。 Λ の Auslander-Reiten quiver を $\mathfrak{a}(\Lambda)$ で表す事にする [ARS]。

1.1 定義 Γ を別の R -order とする。 Γ が Λ の overorder であるとは、 $\Lambda \subseteq \Gamma \subseteq A$ が成立する事。より一般に Γ が Λ の overring であるとは、 A のあるイデアル I に対して $(\Lambda + I)/I \subseteq \Gamma \subseteq A/I$ が成立する事。これらの時、自然な環準同型 $\Lambda \rightarrow \Gamma$ は忠実充満関手 $\text{lat } \Gamma \rightarrow \text{lat } \Lambda$ を導き、 $\text{lat } \Gamma$ は $\text{lat } \Lambda$ の充満部分圏とみなされる。特に $\text{ind}(\text{lat } \Gamma)$ は $\text{ind}(\text{lat } \Lambda)$ の部分集合とみなされる。 Λ の overring 全体は (A に引き戻した環の自然な包含関係を考える事により) 半順序集合となるが、 $\Gamma \mapsto \text{ind}(\text{lat } \Gamma)$ なる対応は「 Λ の overring 全体」から「 $\text{ind}(\text{lat } \Lambda)$ の部分集合全体」への順序を逆にする単射を与える。また自分自身以外に overorder を持たない order を極大 order と呼ぶ。

1.2 例 (1) $\Lambda := \begin{pmatrix} R & R \\ J_R^2 & R \end{pmatrix} \subset A := M_2(K)$ ($n \geq 0$) と置くと、 Λ の overring 全体の成す半順序集合は次の様になる (簡単の為 $n = 2$ とした)。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} R & J_R^{-2} \\ J_R^2 & R \end{pmatrix} \\ & \cup \\ & \begin{pmatrix} R & J_R^{-1} \\ J_R^2 & R \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} R & J_R^{-1} \\ J_R & R \end{pmatrix} \\ & \cup \\ \Lambda = & \begin{pmatrix} R & R \\ J_R^2 & R \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} R & R \\ J_R & R \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

対応する $\text{ind}(\text{lat } \Lambda)$ の部分集合は次の様になる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} R \\ J_R^2 \end{pmatrix} \right\} \\ & \cap \\ & \left\{ \begin{pmatrix} R \\ J_R^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ J_R \end{pmatrix} \right\} \supset \left\{ \begin{pmatrix} R \\ J_R \end{pmatrix} \right\} \\ & \cap \\ & \left\{ \begin{pmatrix} R \\ J_R^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ J_R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \right\} \supset \left\{ \begin{pmatrix} R \\ J_R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \right\} \supset \left\{ \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

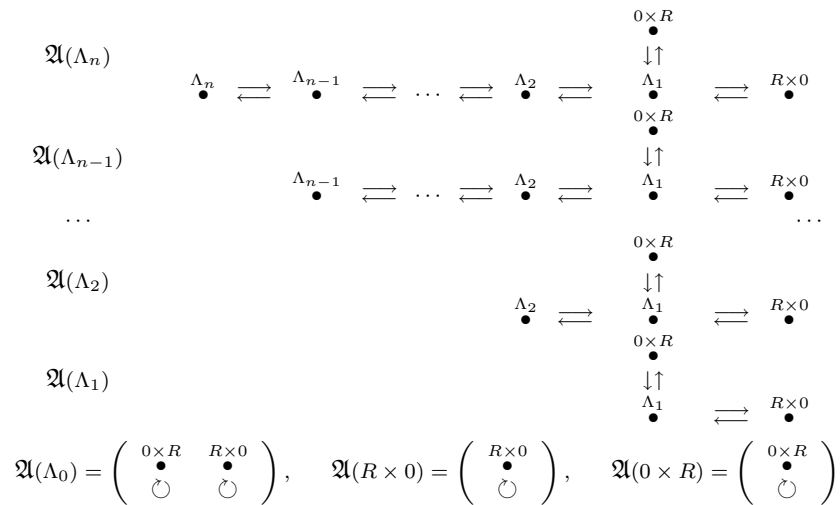
(2) $\Lambda = \Lambda_n := \{(x, y) \in R \times R \mid x - y \in J_R^n\} \subset A := K \times K$ ($n \geq 0$) と置くと、 Λ の overring 全体の成す半順序集合は次の様になる。($R \times R \subset R \times 0$ という表記は違和感があるが、1.1 の約束により $R \times 0$ を A に引き戻した環 $R \times K$ を考えている事に注意。)

$$\begin{array}{c} 0 \times R \\ \cup \\ \Lambda_n \subset \Lambda_{n-1} \subset \cdots \subset \Lambda_2 \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_0 = R \times R \subset R \times 0 \end{array}$$

対応する $\text{ind}(\text{lat } \Lambda)$ の部分集合は次の様になる。

$$\left\{ \begin{array}{c} \Lambda_i (0 < i \leq n) \\ R \times 0 \\ 0 \times R \end{array} \right\} \supset \left\{ \begin{array}{c} \Lambda_i (0 < i < n) \\ R \times 0 \\ 0 \times R \end{array} \right\} \supset \cdots \supset \left\{ \begin{array}{c} \Lambda_1, \Lambda_2 \\ R \times 0 \\ 0 \times R \end{array} \right\} \supset \left\{ \begin{array}{c} \Lambda_1 \\ R \times 0 \\ 0 \times R \end{array} \right\} \supset \left\{ \begin{array}{c} \{0 \times R\} \\ \cap \\ R \times 0 \\ 0 \times R \end{array} \right\} \supset \{R \times 0\}$$

より分かり易くする為、各 overring の Auslander-Reiten quiver を描いてみると、次の様に Dynkin diagram \mathbb{D}_i に似た図になる (これには理由がある)。



興味深いのは上に行くにしたがって1点ずつ減っている点である。同様に(1)においても、どの隣り合う二つの order $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ を選んできても、集合 $\text{ind}(\text{lat } \Gamma_1)$ と $\text{ind}(\text{lat } \Gamma_2)$ は1つの元しか変わらない。この現象はいつでも成立するとは限らないのだが、それを分析する為に次の概念を導入する。

1.3 $\text{ind}(\text{lat } \Lambda)$ の部分集合 S のうち、ある overring (resp. overorder) Γ により $S = \text{ind}(\text{lat } \Lambda) - \text{ind}(\text{lat } \Gamma)$ となるものを **rejectable** (resp. 強 **rejectable**) と呼ぶ [I1,2]。当然、 $\Gamma \mapsto \text{ind}(\text{lat } \Lambda) - \text{ind}(\text{lat } \Gamma)$ なる対応は「 Λ の overring 全体」から「 $\text{ind}(\text{lat } \Lambda)$ の rejectable 部分集合全体」への順序を保つ全単射を与える。この時、上の現象は次の Drozd-Kirichenko による補題 [DK1] により説明される。

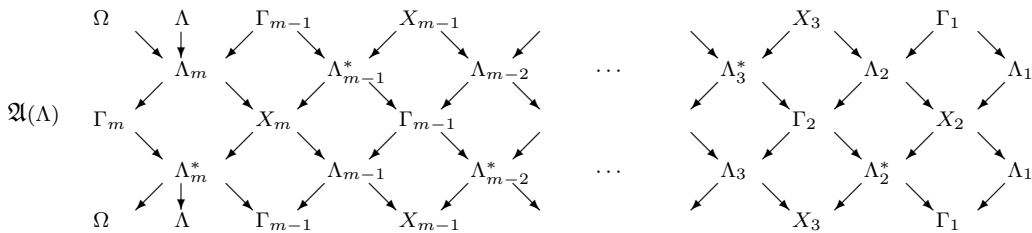
定理 (1 点 rejection) Λ を R -order とする。 $X \in \text{ind}(\text{lat } \Lambda)$ に対し、 $\{X\}$ が rejectable である必要十分条件は、 $X \in \text{pr } \Lambda \cap \text{in } \Lambda$ となる事である。

これは Bass order の理論において非常に重要であり [DKR][HN1,2]、Bass order からはいつでも overorder の列 $\Lambda_n \subset \Lambda_{n-1} \subset \dots \subset \Lambda_0$ が生じる事が分かる。実際 1.2 の例は Bass order の 2 系列を与えているのだが、ここではこれ以上は触れない。

1.4 例 rejectable 部分集合に関して、別の例で観察してみる。 Λ を 1 次元単純特異点の完備化とする時、 Λ の部分環 R が存在して Λ は R -order となる [DW]。 $\mathbb{A}_n : k[[X, Y]]/(X^{n+1} + Y^2)$ の場合は、1.2(2) と”ほぼ”同じになるので、 Λ は $\mathbb{D}_n : k[[X, Y]]/(X^{n-1} + XY^2)$ であるものとし、 n が奇数 $n = 2m + 1$ の場合を扱う (偶数の時も”ほぼ”同じである)。この時、 Λ の overring 全体は次の様になる。(ここで Ω は極大 order、 Γ_i は \mathbb{A}_{2i-2} 型の単純特異点であり、 Λ_i は \mathbb{D}_{2i+1} 型の単純特異点の最小 overorder になる。)

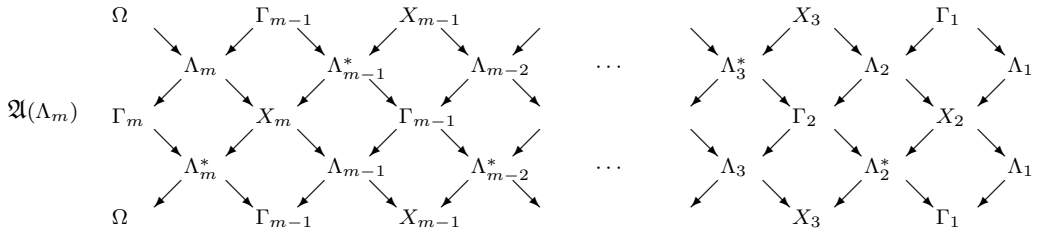
$$\begin{array}{cccccccc}
 \Gamma_m & \subset & \Gamma_{m-1} & \subset & \dots & \subset & \Gamma_2 & \subset & \Gamma_1 \\
 \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup \\
 \Omega \times \Gamma_m & \subset & \Omega \times \Gamma_{m-1} & \subset & \dots & \subset & \Omega \times \Gamma_2 & \subset & \Omega \times \Gamma_1 \subset \Omega \\
 \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup \\
 \Lambda & \subset & \Lambda_m & \subset & \Lambda_{m-1} & \subset & \dots & \subset & \Lambda_2 & \subset & \Lambda_1
 \end{array}$$

$\mathfrak{A}(\Lambda)$ は次の様になる。(上下を同一視しており、 X_i はある lattice である。)

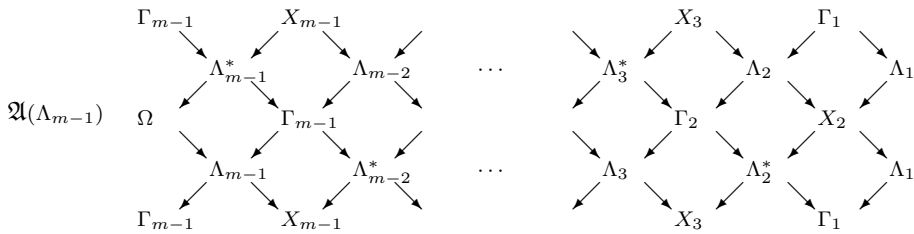


以下、 $\mathfrak{A}(\Lambda_i)$ の変化を順次見ていく事にする。 Λ には 1.3 の 1 点 rejection

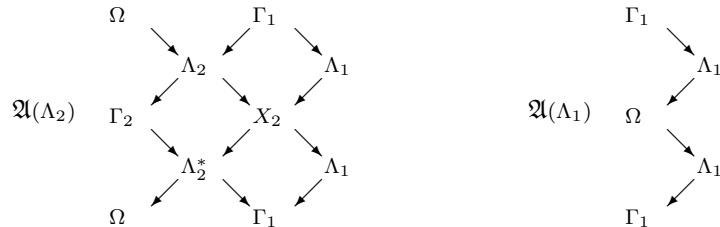
を用いる事ができ、 $\mathfrak{A}(\Lambda_m)$ は $\mathfrak{A}(\Lambda)$ から $\{\Lambda\}$ のみ除いた次の形になる。



$\mathfrak{A}(\Lambda_{m-1})$ は $\mathfrak{A}(\Lambda_m)$ から 4 点 $\begin{matrix} \Lambda_m & \rightarrow & X_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_m & \rightarrow & \Lambda_m^* \end{matrix}$ を除いた次の形になる。



同様に $\mathfrak{A}(\Lambda_{m-2})$ は $\mathfrak{A}(\Lambda_{m-1})$ から 4 点 $\begin{matrix} \Lambda_{m-1} & \rightarrow & X_{m-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_{m-1} & \rightarrow & \Lambda_{m-1}^* \end{matrix}$ を除いたものとなり、順次 4 点ずつ減っていく。最終的に $\mathfrak{A}(\Lambda_2)$ 及び $\mathfrak{A}(\Lambda_1)$ は下の様になる。



1.5 ここで自然な疑問として、4 点ずつ減っていったのは何故であろうか？これには理由があり、1.3 の 1 点 rejection の類似として、次の様な事実 (4 点 rejection) が成立する。即ち一般の order Λ に対して「 $\mathfrak{A}(\Lambda)$ において $\begin{matrix} P & \rightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \rightarrow & I \end{matrix}$ (但し $P \in \text{ind}(\text{pr } \Lambda)$, $I \in \text{ind}(\text{in } \Lambda)$, $P = \tau I$) の形をした 4 点集合 $\{P, X, Y, I\}$ は rejectable である。」1 点 rejection が Bass order に対して基本的であったのと同様に、4 点 rejection は有限表現型局所 order の理論において基本的であるが、ここではこれ以上は触れない ([HN3] 参照)。

実は遥かに一般に、 $\text{ind}(\text{lat } \Lambda)$ の有限部分集合 S が与えられた時、 S が rejectable か否は「 $\mathfrak{Q}(\Lambda)$ を S に制限した quiver」のみから決まり、 S の外には全くよらない事が分かる。更に、その条件は quiver の言葉で容易に記述する事が可能である（一般 rejection）[I1,2,3]。ここではそれは省略するが、1.6 に少しの例を挙げておく。そこの (1) が 1.3 の 1 点 rejection であり、(12) がここで挙げた 4 点 rejection である。

最後にアルチン代数との関連について触れておく。アルチン代数に対しても、overring の代わりに剰余環を用いる事によって rejectable 部分集合の概念が定義されるが、興味深い事に上で述べた一般 rejection（1 及び 4 点 rejection を含む）は、実はアルチン代数の世界においても全くそのままに成立する。この観察が 2 章における圏論的定式化の一つの動機である。

1.6 例 [I1] S を $\text{ind}(\text{lat } \Lambda)$ の部分集合とする。 S が最小 rejectable であるとは、 S に含まれる rejectable 部分集合は、 S と空集合のみである事とする。この時、 $S \cap \text{ind}(\text{pr } \Lambda)$ 及び $S \cap \text{ind}(\text{in } \Lambda)$ は一点よりなる事が示される。

さて、 S を $\text{ind}(\text{lat } \Lambda)$ の部分集合で $\#S \leq 4$ なるものとする。この時 S が最小な強 rejectable である必要十分条件は、 S が次のいずれかの形をしている事である。ここで、 $\{P\} := S \cap \text{ind}(\text{pr } \Lambda)$ 及び $\{I\} := S \cap \text{ind}(\text{in } \Lambda)$ とおいた。

- (1)
$$\begin{array}{c} P=I \\ \bullet \end{array}$$
- (2)
$$\begin{array}{c} P \quad I \\ \bullet \longrightarrow \bullet \end{array}$$
- (3)
$$\begin{array}{c} P(a \ b) \quad I \\ \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \end{array} \quad ab \leq 2$$
- (4)
$$\begin{array}{c} P \quad (a \ b)I \\ \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \end{array} \quad ab \leq 2$$
- (5)
$$\begin{array}{c} P(a \ b) \quad (b \ a)I \\ \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \end{array} \quad P = \tau I, ab \leq 3$$
- (6)
$$\begin{array}{c} P(a \ b) \quad I \\ \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \end{array} \quad ab \leq 2$$
- (7)
$$\begin{array}{c} P \quad (a \ b)I \\ \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \end{array} \quad ab \leq 2$$
- (8)
$$\begin{array}{c} P \quad (a \ b)I \\ \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \end{array} \quad ab \leq 2$$
- (9)
$$\begin{array}{c} P(a \ b) \quad (b \ a)X \quad I \\ \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \end{array} \quad P = \tau X, ab \leq 3$$
- (10)
$$\begin{array}{c} P \quad X(a \ b) \quad (b \ a)I \\ \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \end{array} \quad X = \tau I, ab \leq 3$$
- (11)
$$\begin{array}{c} P \quad \bullet \quad I \\ \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \\ \quad \quad \downarrow \uparrow \\ \quad \quad X \bullet \end{array} \quad P = \tau I, X = \tau X$$
- (12)
$$\begin{array}{c} \bullet \quad I \\ \uparrow \quad \uparrow \\ P \bullet \quad \bullet \end{array} \quad P = \tau I$$

2 加群の近似、rejective 部分圏及び準遺伝環

以下では特に断らない限り \mathcal{C} で加法圏、 $\mathcal{C}(X, Y)$ で $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ を表し、 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ と $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ の合成を $fg \in \mathcal{C}(X, Z)$ で表す。簡単の為 \mathcal{C} の部分圏 \mathcal{C}' は常に充満で同型と直和と直和因子で閉じているものとする。また $X \in \mathcal{C}$ に対して、 $\text{add } X$ で X の直和の直和因子全体より成る \mathcal{C} の部分圏を表す。 X が \mathcal{C} の加法生成元であるとは、 $\text{add } X = \mathcal{C}$ となる事である。

2.1 定義 I を \mathcal{C} のイデアルとする。即ち、任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(X, Y)$ の部分群 $I(X, Y)$ が与えられており、合成 $\mathcal{C}(W, X)I(X, Y)\mathcal{C}(Y, Z)$ は $I(W, Z)$ に含まれるとする。

(1) $f \in I(Y, X)$ が X の右 I -近似であるとは、 $\mathcal{C}(_, Y) \xrightarrow{f} I(_, X) \rightarrow 0$ が完全である事を意味する。

(2) 任意の $X \in \mathcal{C}$ が右 I -近似をもつ時、 I は右有限生成であると言う。
双対的に、左 I -近似及び左有限生成も定義される。

近似の概念は [AS2] で導入されたものだが、多くの重要な例が存在する。 $J_{\mathcal{C}}$ で \mathcal{C} の Jacobson radical を表す。即ち $J_{\mathcal{C}}$ は \mathcal{C} のイデアルのうち、任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して $J_{\mathcal{C}}(X, X)$ が環 $\mathcal{C}(X, X)$ の通常の意味での Jacobson radical を与える様なものである。一方 \mathcal{C} の部分圏 \mathcal{C}' に対し、 $[\mathcal{C}']$ で \mathcal{C}' の対象を factor through する射全体から成る \mathcal{C} のイデアルを表す事にする。

2.2 例 (1) Λ を可換 Cohen-Macaulay 環で双対加群を持つものとし、 $\text{CM } \Lambda$ を maximal Cohen-Macaulay Λ -加群の成す圏とする。すると $\text{mod } \Lambda$ のイデアル $[\text{CM } \Lambda]$ は、左右とも有限生成となる (Auslander-Buchweitz 理論 [AB])。

(2) 任意の R -order (resp. アルチン代数) Λ に対して、 $J_{\text{lat } \Lambda}$ は $\text{lat } \Lambda$ の (resp. $J_{\text{mod } \Lambda}$ は $\text{mod } \Lambda$ の) 左右とも有限生成なイデアルとなる (Auslander-Reiten 理論 [ARS][A2])。

さて、次に右有限生成より強い、右 rejective なる概念を導入する。

2.3 定義 \mathcal{C} の部分圏 \mathcal{C}' が右 rejective であるとは、任意の $X \in \mathcal{C}$ が単射な右 $[\mathcal{C}']$ -近似をもつ事を意味する。双対的に左 rejective も定義され、右かつ左 rejective である時、単に rejective と呼ぶ [I3]。

次の意味で、rejective 部分圏の概念は overring の概念を圏論的に定式化したものである事が分かる。一方、右 rejective 部分圏に対してはそのような表現論的な意味は見出し難く、rejective 部分圏よりも遥かにたくさんある。その事が 3 章と 4 章において鍵となる。

2.4 命題 (1) Λ を R -order とする時、 $\mathcal{C} = \text{lat } \Lambda$ の部分圏 \mathcal{C}' が rejective である必要十分条件は、ある overring Γ に対して $\mathcal{C}' = \text{lat } \Gamma$ となる事である。

(2) Λ をアルチン代数とする時、 $\mathcal{C} = \text{mod } \Lambda$ の部分圏 \mathcal{C}' が rejective である必要十分条件は、ある剰余環 $\Gamma = \Lambda/I$ に対して $\mathcal{C}' = \text{mod } \Gamma$ となる事である。

(1)(2) のいずれにおいても、 $X \in \mathcal{C}$ の右近似は $\text{Hom}_\Lambda(\Gamma, X) \rightarrow X$ 、左近似は $X \rightarrow (\Gamma \otimes_\Lambda X)^{**}$ で与えられる。

2.5 Cline-Parshall-Scott によって導入された準遺伝環を定義する [CPS1]。

定義 Γ をアルチン代数とし I を Γ の両側イデアルとする。 I が Γ の遺伝イデアルであるとは、 $I^2 = I \in \text{pr } \Gamma$ 及び $IJ_\Gamma I = 0$ が成立する事。 Γ が準遺伝環であるとは、 $0 = I_m \subseteq I_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq I_0 = \Gamma$ なる両側イデアルの列 (遺伝鎖) で、任意の n ($0 < n \leq m$) に対して I_{n-1}/I_n が Γ/I_n の遺伝イデアルとなるものが存在する事。この時、重要な性質として $\text{gl.dim } \Gamma \leq 2m - 2$ が成立する [DR1]。またアルチン代数 Γ に対し、 Γ が準遺伝環である事と $\text{mod } \Gamma$ が”最高ウェイト圏”を成す事が同値である [CPS1]。

2.6 定義 加法圏 \mathcal{C} に対し、部分圏の列 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ が (\mathcal{C} から \mathcal{C}' への) 右 rejective 鎖であるとは、任意の n ($0 \leq n < m$) に対して $J_{\mathcal{C}_n / [\mathcal{C}_{n+1}]} = 0$ が成立しかつ \mathcal{C}_{n+1} が \mathcal{C} の右 rejective 部分圏である事を意味する [I5]。

例えば 1.2(2) の overorder の列 $\Lambda_n \subset \Lambda_{n-1} \subset \cdots \subset \Lambda_0$ からは、自然に (右かつ左) rejective 鎖 $\text{lat } \Lambda_0 \subset \cdots \subset \text{lat } \Lambda_{n-1} \subset \text{lat } \Lambda_n$ が生じる。しかし 1.4 の例 \mathbb{D}_n の overorder の列からはそのままでは右 rejective 鎖は生じない (条件 $J_{\mathcal{C}_n / [\mathcal{C}_{n+1}]} = 0$ が満たされない)。しかし R -order Λ に付随する圏 $\text{lat } \Lambda$ や、アルチン代数 Λ に付随する圏 $\text{mod } \Lambda$ には、いつでも”十分多くの”右 rejective 鎖が存在する事を 3.5 及び 4.4 で見るであろう。この事実が本文で決定的な役割を果たす。

2.7 次の事実により、右 rejective 鎖と準遺伝環との関係が得られる。特別な例として、Auslander-Smalø の preprojective 分割 [AS1] が Dlab-Ringel により準遺伝環と関係づけられた事が挙げられる [DR3]。

命題 加法圏 \mathcal{C} が加法生成元 M を持ち $\Gamma := \mathcal{C}(M, M)$ がアルチン代数であると仮定する。

(1) 全単射 $\{\mathcal{C}' : \mathcal{C} \text{ の右 rejective 部分圏で } J_{\mathcal{C}'} = 0 \text{ なるもの}\} \rightarrow \{I : \Gamma \text{ の遺伝イデアル}\}$ が $\mathcal{C}' \mapsto I := [\mathcal{C}'](M, M)$ により与えられる。

(2)[I5] もし \mathcal{C} から 0 への右 rejective 鎖 $0 = \mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ が存在するならば、 Γ は準遺伝環となり、その遺伝鎖は $0 = [\mathcal{C}_m](M, M) \subseteq [\mathcal{C}_{m-1}](M, M) \subseteq \cdots \subseteq [\mathcal{C}_0](M, M) = \Gamma$ で与えられる。特に $\text{gl.dim } \Gamma$ は有限である。

3 アルチン代数の表現次元

この章では Λ, Γ 等はアルチン代数を表す事とする。 $\text{pd}_\Gamma X$ で $X \in \text{mod } \Gamma$ の射影次元を表す。 $0 \rightarrow I_0(\Gamma) \rightarrow I_1(\Gamma) \rightarrow I_2(\Gamma) \rightarrow \cdots$ で左 Γ -加群 Γ の最小入射分解を表す事にする。 Γ の dominant 次元を $\text{dom.dim } \Gamma := \inf\{i \geq 0 \mid \text{pd}_\Gamma I_i(\Gamma) \neq 0\}$ で定める [T]。表現次元を導入する前に、次の Auslander による古典的な定理を紹介する [ARS]。

3.1 定理 アルチン代数 Λ で $\#\text{ind}(\text{mod } \Lambda) < \infty$ を満たすものの森田同値類と、アルチン代数 Γ で $\text{gl.dim } \Gamma \leq 2$ かつ $\text{dom.dim } \Gamma \geq 2$ を満たすものの森田同値類の間に全単射が存在する。対応は $\Lambda \mapsto \Gamma := \text{End}_\Lambda(\bigoplus_{X \in \text{ind}(\text{mod } \Lambda)} X)$ 及び $\Gamma \mapsto \Lambda := \text{End}_\Gamma(I_0(\Gamma))$ で与えられる。

この様な Λ を有限表現型と呼び、一方 Γ を Auslander 代数と呼ぶ。「有限表現型」という表現論的な性質と、「Auslander 代数」というホモロジー代数的な性質の対応を示す興味深いものである。これはアルチン代数の表現論において最も重要なものであり、ここから Auslander-Reiten 理論が生じるわけだが、それについては深入りしない。

自然な問題として、上記の Γ においてより一般的なホモロジー代数的性質を与えた時、何か良い表現論的性質を持つ Λ が対応するのではないだろうか？ あわよくば従来の Auslander-Reiten 理論を”2次元版”とする”高次元 Auslander-Reiten 理論”と呼ぶべきものが構成できるのでは無いだろうか？ その一つの方向として Auslander は「 $\text{gl.dim } \Gamma \leq n$ かつ $\text{dom.dim } \Gamma \geq 2$ 」なる条件の対応物として、表現次元という概念を次の様に導入した [A1]。

3.2 アルチン代数 Λ の表現次元を $\text{rep.dim } \Lambda := \inf \text{gl.dim } \Gamma$ により定める。ここで Γ はアルチン代数のうち、 $\text{dom.dim } \Gamma \geq 2$ かつ $\text{End}_\Gamma(I_0(\Gamma))$ が Λ と森田同値になるもの全体を動く。Auslander は更に次の基本的な結果を示した。後の考察には定義自身よりも (1) の方が便利である。

定理 (1) $\text{rep.dim } \Lambda = \inf\{\text{gl.dim } \text{End}_\Lambda(\Lambda \oplus \Lambda^* \oplus N) \mid N \in \text{mod } \Lambda\}$ 。
 (2) Λ が有限表現型である必要十分条件は $\text{rep.dim } \Lambda \leq 2$ 。

(2) の意味で表現次元は「 Λ がどの位有限表現型から離れているか？」を

計るわけだが、表現次元に関して知られている事は [FGR][X1,2] 等多くはない。その原因の一つとしては、表現次元がある種ホモロジー代数的難問と結びついている事があるのかもしれない (3.7)。逆に言えばそれらに「表現論的アプローチ」とでも呼ぶべきものの足がかりを与えてくれる可能性がある。それはさておき、驚いた事に次の問題に対しても、あまり進展は無かった様である。この章の目的はそれを肯定的に解決する事にある。

3.3 問題 任意のアルチン代数 Λ に対して $\text{rep.dim } \Lambda$ は有限か？

上の問題の一つの拡張として、Ringel-山形は次の問題を予想した [X2]。 $M = \Lambda \oplus \Lambda^*$ とおく事により、問題 3.4 が正しければ問題 3.3 も正しい (2.5)。

3.4 問題 任意のアルチン代数 Λ 及び任意の $M \in \text{mod } \Lambda$ に対して、ある $N \in \text{mod } \Lambda$ が存在して、 $\text{End}_\Lambda(M \oplus N)$ は準遺伝環になるか？

3.5 問題 3.4 を証明する為には 2.7 によると、 M を含む $\text{mod } \Lambda$ の部分圏 \mathcal{C} で、右 rejective 鎖を持つものを構成すればよい。それは次の様にして実現されるのだが、証明は省略する [I5]。

定理 Λ をアルチン代数とする。任意の $M \in \text{mod } \Lambda$ に対して、 $M_0 := M$, $M_{n+1} := M_n J_{\text{End}_\Lambda(M_n)} \subsetneq M_n$ とおくと十分大きな m に対して $M_m = 0$ となる。この時、 $\mathcal{C}_n := \text{add } \bigoplus_{l=n}^{m-1} M_l$ と置くと、 $0 = \mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ は右 rejective 鎖となる。特に $N := \bigoplus_{l=0}^{m-1} M_l$ に対して $\Gamma := \text{End}_\Lambda(N)$ は準遺伝環となる。

3.6 問題 3.3 及び 3.4 は、3.5 より直ちに解決される。

定理 Λ をアルチン代数とする。この時任意の $M \in \text{mod } \Lambda$ に対して、ある $N \in \text{mod } \Lambda$ が存在して、 $\text{End}_\Lambda(M \oplus N)$ は準遺伝環になる。特に $\text{rep.dim } \Lambda$ は有限である。

3.7 問題 では Λ をアルチン代数全体を動かした時、集合 $\{\text{rep.dim } \Lambda\}$ はどのようなものになるであろうか？これは全く未解決である。驚くべき事に現在の所、 $\text{rep.dim } \Lambda > 3$ となる例さえ知られていない様である。しかしこれは ([A1] で既に指摘されていた様に) 表現次元の概念が”良くない”事を必ずしも意味しない。即ち、条件 $\text{rep.dim } \Lambda \leq 3$ は実に興味深いものである事を以下説明する。

今、 $\text{fin.dim } \Lambda$ で有限大域次元 $\sup\{\text{pd}_\Lambda X \mid X \in \text{mod } \Lambda, \text{pd}_\Lambda X < \infty\}$ を

表す [B]。古くからの未解決問題として、有限大域次元予想、即ち「任意のアルチン代数は $\text{fin.dim } \Lambda < \infty$ を満たすのではないか？」というものがある。これは中山予想等の多くのホモロジー代数における未解決問題の中でもかなり強い予想である。さて近年 Igusa-Todorov は次の興味深い結果を示した ([IT]0.8)。

3.7.1 定理 Γ をアルチン代数で $\text{gl.dim } \Gamma \leq 3$ なるものとする。この時、任意の $P \in \text{pr } \Gamma$ に対して $\Lambda := \text{End}_\Gamma(P)$ は $\text{fin.dim } \Lambda < \infty$ を満たす。

これより直ちに「 $\text{rep.dim } \Lambda \leq 3$ ならば $\text{fin.dim } \Lambda < \infty$ 」となる事が分かり、表現次元と有限大域次元との間の興味深い関係が姿を現す。特に、もし任意のアルチン代数が $\text{rep.dim } \Lambda \leq 3$ を満たすならば、有限大域次元予想も正しい事になる。しかしそれが正しいか否かは難しい問題である。

4 Solomon ゼータ関数

以下 R を \mathbb{Z} もしくは p 進完備化 \mathbb{Z}_p とする。 R -order Λ に対し、その Solomon ゼータ関数は $\zeta_\Lambda(s) := \sum_L (\Lambda : L)^{-s}$ により定義される。ここで s は複素変数であり、 L は Λ の左イデアルで $(\Lambda : L) < \infty$ なるもの全体を動く [S1]。この時 ζ_Λ は $\text{Re}(s)$ が十分大きければ収束するが、全平面の有理型関数に解析接続される事が証明される。Solomon ゼータ関数は代数体の Dedekind ゼータ関数の一般化を与えている。後に Bushnell-Reiner は Solomon ゼータ関数を用いて、代数体の整数環に対しては良く知られている素数定理やイデアルの漸近分布公式等を、一般の order に対して得る事に成功した [BR1,2,3,4]。 Λ が Gorenstein order の場合には関数等式が成立する事も知られている。

$R = \mathbb{Z}$ の場合、 $\Lambda_p := \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ と置くとオイラー積公式 $\zeta_\Lambda = \prod_{p:\text{prime}} \zeta_{\Lambda_p}$ が成立する [S1]。 Λ の極大 overorder Γ に対しては、 ζ_Γ は Dedekind ゼータ関数を用いて記述する事が出来るが ([BR2]§2) 一方 $\{p : \text{prime} \mid \Lambda_p \neq \Gamma_p\}$ は有限集合なので、 ζ_Λ と ζ_Γ の違いは有限個の素点においてしか現れない。以下ではそれを調べる為に、 $R = \mathbb{Z}_p$ の場合のみ扱う。

より一般に、以下では 1 章と同様に R を完備離散付値環とし K をその商体とする。但し R の剰余体 k に対し $p := \#k$ が有限であるとする。 Λ は可換とは限らないので、イデアルよりも一般に加群に対してゼータ関数を定義するのが自然である。

4.1 定義 以下 K -代数 $A := \Lambda \otimes_R K$ が半単純であると仮定し、 $(\widetilde{\quad})$ で関手 $(\quad) \otimes_R K : \text{lat } \Lambda \rightarrow \text{mod } A$ を表す。長さ有限の A -加群 V に対し、 $\mathfrak{L}_\Lambda(V)$ で V の中の full Λ -lattice (即ち Λ -lattice L で $L \subset V$, $KL = V$ となるもの) 全体

のなす半順序集合を表す。 \simeq で Λ -加群の同型を表す時、 $\bar{\mathfrak{L}}_\Lambda(V) := \mathfrak{L}_\Lambda(V) / \simeq$ は Jordan-Zassenhaus の定理より有限集合である [CR]。さて $L, M \in \bar{\mathfrak{L}}_\Lambda(V)$ に対し、Solomon は

$$\text{部分ゼータ関数} \quad Z(L, M; s) := \sum_{N \subseteq L, N \simeq M} (L : N)^{-s}$$

$$n \times n \text{ のゼータ行列} \quad \mathbf{Z}_\Lambda(V; s) := (Z(L, M; s))_{L, M \in \bar{\mathfrak{L}}_\Lambda(V)} \quad (n := \#\bar{\mathfrak{L}}_\Lambda(V))$$

を研究した。彼は $\mathbf{Z}_\Lambda(V; s)$ が逆行列を $M_n(\mathbb{Z}[p^{-s}])$ の中に持つ事を組合せ的な議論 (Möbius inversion) で示した [S1]。特に $Z(L, M; s)$ は $\mathbb{Q}(p^{-s})$ に入る。更に彼は [S2] の中で次の二つの予想を提出した。

4.2 問題 (1) A の極大 order Γ に対し、 $Z(L, M; s) / \mathbf{Z}_\Gamma(V; s) \in \mathbb{Z}[p^{-s}]$ である。($\mathbf{Z}_\Gamma(V; s)$ は 1×1 行列である。)

(2) $\det \mathbf{Z}_\Lambda(V; s)$ は有限積 $\prod_i (1 - p^{a_i - b_i s})^{-1}$ ($a_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}, b_i \in \mathbb{N}_{> 0}$) である。

(1) の方は Bushnell-Reiner によりゼータ積分を用いて証明された [BR1]。しかし (2) の方は、 Λ が遺伝的 ($\text{gl.dim } \Lambda = 1$) である特別な場合に Denert [D] により証明された以外は、未解決のままであった。以下では一般の Λ に対して $\det \mathbf{Z}_\Lambda(V; s)$ を明確に与え、特に (2) が正しい事を示す。

4.3 以下 [I4] に従う。我々のアプローチの基本は、Solomon ゼータ関数を $\text{lat } \Lambda$ の部分圏に対して定義する事にある。 $\text{lat } \Lambda$ の部分圏 \mathcal{C} に対し、 $\mathfrak{L}_\Lambda(V)$ (resp. $\bar{\mathfrak{L}}_\Lambda(V)$) の元のうち \mathcal{C} に含まれるものより成る部分集合を $\mathfrak{L}_\mathcal{C}(V)$ (resp. $\bar{\mathfrak{L}}_\mathcal{C}(V)$) と表す事にする。更に $\mathbf{Z}_\Lambda(V; s)$ の小行列を $\mathbf{Z}_\mathcal{C}(V; s) := (Z(L, M; s))_{L, M \in \bar{\mathfrak{L}}_\mathcal{C}(V)}$ で定める。一般の部分圏 \mathcal{C} に対しては、 $\det \mathbf{Z}_\mathcal{C}(V; s)$ は 4.2(2) の形になるとは限らない。しかし 4.5(2) に見るように、 Λ のある極大 overorder Γ に対して、 \mathcal{C} から $\text{lat } \Gamma$ への右 rejective 鎖 (2.6) が存在するならば $\det \mathbf{Z}_\mathcal{C}(V; s)$ を求める事ができ、特に 4.2(2) の形になる事が分かる。一方そのような \mathcal{C} の例として、忠実な $V \in \text{mod } A$ に対して定まるある部分圏 \mathcal{C}_V がとれる事が、次の 4.4 より分かる。特に $\mathbf{Z}_\Lambda(V; s) = \mathbf{Z}_{\mathcal{C}_V}(V; s)$ が成立するので、 $\mathbf{Z}_\Lambda(V; s)$ も 4.2(2) の形をしている事が分かる。(3.5 の order 版を用いる事も出来る。)

4.4 定理 忠実な $V \in \text{mod } A$ に対し $\mathcal{C}_V := \text{add}\{X \in \text{ind}(\text{lat } \Lambda) \mid \widetilde{X} \subseteq V\}$ とおく。この時 Λ の任意の極大 overorder Γ に対して、 \mathcal{C}_V から $\text{lat } \Gamma$ への右 rejective 鎖が存在する。

4.4.1 注意 2.7 の類似について少し注意しておく。準遺伝環の 1 次元版として、König-Wiedemann が導入した準遺伝 order なる概念がある [KW]。 \mathcal{C} を

lat Λ の部分圏で加法生成元 M を持つものとする。もし Λ のある極大 overorder Γ に対して、 \mathcal{C} から lat Γ への右 rejective 鎖が存在するならば、 $\text{End}_\Lambda(M)$ は準遺伝 order となり、特に $\text{gl.dim } \text{End}_\Lambda(M) < \infty$ が成立する。

4.5 $A = \prod_{j=1}^r A_j$ を単純 K -代数 A_j への分解とする。 e_j を A_j の単位元、 Γ_j を A_j 中の $e_j \Lambda$ の極大 overorder とし、 $\Gamma := \prod_{j=1}^r \Gamma_j$ と置く。 S_j を単純 A_j -加群とし、 G_j を単純 Γ_j -加群とすると、 S_1, \dots, S_r (resp. G_1, \dots, G_r) は単純 A -加群 (resp. 単純 Γ -加群) の同型類の完全代表系を与える。 $X \in \text{mod } A$ に対し $l_j(X)$ で X の組成因子中の S_j の重複度を表し、 $q_j := \# \text{End}_\Gamma(G_j) = p^{\dim_k \text{End}_\Gamma(G_j)}$ ($1 \leq j \leq r$) とおく。すると q_j は Γ_j の選択によらず一定である。

定理 Λ を R -order とし、 $V \in \text{mod } A$ に対して $V_j := V/S_j^{l_j(V)}$ ($1 \leq j \leq r$) と置く。

(1) この時次式が成立する。

$$\det \mathbf{Z}_\Lambda(V; s) = \prod_{j=1}^r \prod_{n=0}^{l_j(V)-1} (1 - q_j^{n-l_j(A)s - \#\bar{\Sigma}_\Lambda(S_j^n \oplus V_j)}).$$

(2) \mathcal{C} を lat Λ の部分圏とし、 \mathcal{C} から lat Γ への右 rejective 鎖が存在すると仮定する。この時次式が成立する。

$$\det \mathbf{Z}_\mathcal{C}(V; s) = \prod_{j=1}^r \prod_{n=0}^{l_j(V)-1} (1 - q_j^{n-l_j(A)s - \#\bar{\Sigma}_\mathcal{C}(S_j^n \oplus V_j)}).$$

4.6 以下で 4.5 の証明の概略を与える。簡単の為 $r = 1$ 即ち A が単純であると仮定し、 $S := S_1$, $l := l_1$ 及び $q := q_1$ とおく。更に、 $V \in \text{mod } K$ 及び $L, M \in \mathfrak{L}_R(V)$ に対して $(L : M) := (L : L \cap M) \cdot (M : L \cap M)^{-1}$ とおく。この記号は歪対称的であり、 $(L : M) \cdot (M : N) = (L : N)$ を満たす。次の 4.6.1 は容易に示される。

4.6.1 任意の $N \in \text{lat } \Lambda$ に対し、ある写像 $b^N : \bar{\Sigma}_\Lambda(V) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ で、任意の $L, M \in \mathfrak{L}_\Lambda(V)$ に対して次を満たすものが存在する。

$$b_L^N \cdot (b_M^N)^{-1} = (\text{Hom}_\Lambda(N, L) : \text{Hom}_\Lambda(N, M)) \cdot (L : M)^{-l(\tilde{N})/l(A)}$$

4.6.2 次の補題が重要なステップである。

補題 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ を右 rejective 鎖の続いた 2 項とし、 $\text{ind } \mathcal{C} - \text{ind } \mathcal{C}' = \{X\}$ であるとする。この時 $\tilde{X} \subseteq V$ を満たす任意の $V \in \text{mod } A$ に対して、ある対角行列 B と冪零行列 C が存在して次式が成立する。

$$(1 - C) \cdot \mathbf{Z}_{\mathcal{C}}(V; s) = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{\mathcal{C}'}(V; s) & * \\ O & B \cdot \mathbf{Z}_{\mathcal{C}}(V/\tilde{X}; s - l(\tilde{X})/l(A)) \cdot B^{-1} \end{pmatrix}$$

4.6.3 定理 4.5(2) の略証 右 rejective 鎖 $\text{lat } \Gamma = \mathcal{C}_m \subset \cdots \subset \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ をとるが、各 $\text{ind } \mathcal{C}_n$ と $\text{ind } \mathcal{C}_{n+1}$ が一つの元しか違わないと仮定しても良い事が示される。 $m = 0$ の時 4.5(2) が成立する事は、比較的易しいので省略する。 $\mathcal{C}' := \mathcal{C}_1$ に対して 4.5(2) が成立していると仮定する。この時、 \mathcal{C} に対しても 4.5(2) が成立する事を、 V の長さに関する帰納法で示す。その際に 4.6.2 を用いるが、 $\det(1 - C) = 1$ が成立する事を注意しておく。

$$\begin{aligned} & \det \mathbf{Z}_{\mathcal{C}}(V; s) \stackrel{4.6.2}{=} \det \mathbf{Z}_{\mathcal{C}'}(V; s) \cdot \det \mathbf{Z}_{\mathcal{C}}(V/\tilde{X}; s - l(\tilde{X})/l(A)) \\ &= \prod_{n=0}^{l(V)-1} (1 - q^{n-l(A)s})^{-\#\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{C}'}(S^n)} \cdot \prod_{n=0}^{l(V/\tilde{X})-1} (1 - q^{n-l(A)(s-l(\tilde{X})/l(A))})^{-\#\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{C}}(S^n)} \\ &= \prod_{n=0}^{l(V)-1} (1 - q^{n-l(A)s})^{-\#\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{C}'}(S^n) - \#\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{C}}(S^{n-l(\tilde{X})})} \\ &= \prod_{n=0}^{l(V)-1} (1 - q^{n-l(A)s})^{-\#\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{C}}(S^n)} \blacksquare \end{aligned}$$

References

- [A1] M. Auslander: Representation dimension of Artin algebras, Lecture notes, Queen Mary College, London, 1971.
- [A2] M. Auslander: Isolated singularities and existence of almost split sequences. Representation theory, II (Ottawa, Ont., 1984), 194–242, Lecture Notes in Math., 1178, Springer, Berlin-New York, 1986.
- [AB] M. Auslander, R. O. Buchweitz: The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations, Soc. Math. de France, Mem. no. 38 (1989) 5–37.
- [ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smal: Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [AS1] M. Auslander, S. O. Smal: Preprojective modules over Artin algebras. J. Algebra 66 (1980), no. 1, 61–122.

- [**AS2**] M. Auslander, S. O. Smalø: Almost split sequences in subcategories. *J. Algebra* 69 (1981), no. 2, 426–454.
- [**B**] H. Bass: Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* 95 (1960) 466–488.
- [**BR1**] C. J. Bushnell, I. Reiner: Zeta functions of arithmetic orders and Solomon’s conjectures. *Math. Z.* 173 (1980), no. 2, 135–161.
- [**BR2**] C. J. Bushnell, I. Reiner: Zeta-functions of orders. *Integral representations and applications* (Oberwolfach, 1980), pp. 159–173, *Lecture Notes in Math.*, 882, Springer, Berlin-New York, 1981.
- [**BR3**] C. J. Bushnell, I. Reiner: The prime ideal theorem in noncommutative arithmetic. *Math. Z.* 181 (1982), no. 2, 143–170.
- [**BR4**] C. J. Bushnell, I. Reiner: New asymptotic formulas for the distribution of left ideals of orders. *J. Reine Angew. Math.* 364 (1986), 149–170.
- [**CPS1**] E. Cline, B. Parshall, L. Scott: Finite-dimensional algebras and highest weight categories. *J. Reine Angew. Math.* 391 (1988), 85–99.
- [**CPS2**] E. Cline, B. Parshall, L. Scott: Algebraic stratification in representation categories. *J. Algebra* 117 (1988), no. 2, 504–521.
- [**CR**] C. W. Curtis, I. Reiner: *Methods of representation theory. Vol. I. With applications to finite groups and orders.* A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.
- [**D**] M. Denert: Solomon’s second conjecture: a proof for local hereditary orders in central simple algebras. *J. Algebra* 139 (1991), no. 1, 70–89.
- [**DR1**] V. Dlab, C. M. Ringel: Quasi-hereditary algebras. *Illinois J. Math.* 33 (1989), no. 2, 280–291.
- [**DR2**] V. Dlab, C. M. Ringel: Every semiprimary ring is the endomorphism ring of a projective module over a quasihereditary ring. *Proc. Amer. Math. Soc.* 107 (1989), no. 1, 1–5.
- [**DR3**] V. Dlab, C. M. Ringel: Auslander algebras as quasi-hereditary algebras. *J. London Math. Soc.* (2) 39 (1989), no. 3, 457–466.
- [**DK1**] Y. A. Drozd, V. V. Kiričenko: The quasi-Bass orders. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 36 (1972), 328–370.
- [**DK2**] Y. A. Drozd, V. V. Kiričenko: Primary orders with a finite number of indecomposable representations. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 37 (1973), 715–736.
- [**DKR**] Y. A. Drozd, V. V. Kiričenko, A. V. Roiter: Hereditary and Bass orders. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 31 1967 1415–1436.
- [**DW**] E. Dieterich, A. Wiedemann: The Auslander-Reiten quiver of a simple curve singularity, *Trans. Amer. Math. Soc.* 294 (1986) 455–475.
- [**FGR**] R. M. Fossum, P. Griffith, I. Reiten: *Trivial extensions of abelian categories.* *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 456. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.
- [**HN1**] H. Hijikata, K. Nishida: Classification of Bass orders. *J. Reine Angew. Math.* 431 (1992), 191–220.
- [**HN2**] H. Hijikata, K. Nishida: Bass orders in nonsemisimple algebras. *J. Math. Kyoto Univ.* 34 (1994), no. 4, 797–837.

- [**HN3**] H. Hijikata, K. Nishida: Primary orders of finite representation type. *J. Algebra* 192 (1997), no. 2, 592–640.
- [**I1**] O. Iyama: A generalization of rejection lemma of Drozd-Kirichenko. *J. Math. Soc. Japan* 50 (1998), no. 3, 697–718.
- [**I2**] O. Iyama: Some categories of lattices associated to a central idempotent. *J. Math. Kyoto Univ.* 38 (1998), no. 3, 487–501.
- [**I3**] O. Iyama: τ -categories I–III, to appear in *Algebras and Representation theory*.
- [**I4**] O. Iyama: A proof of Solomon’s second conjecture on local zeta functions of orders, to appear in *Journal of Algebra*.
- [**I5**] O. Iyama: Finiteness of Representation dimension, to appear in *Proceedings of the American Mathematical Society*.
- [**IT**] K. Igusa, G. Todorov: On the finitistic global dimension conjecture, preprint.
- [**KW**] S. König, A. Wiedemann: Global dimension two orders are quasi-hereditary. *Manuscripta Math.* 66 (1989), no. 1, 17–23.
- [**S1**] L. Solomon: Zeta functions and integral representation theory. *Advances in Math.* 26 (1977), no. 3, 306–326.
- [**S2**] L. Solomon: Partially ordered sets with colors. *Relations between combinatorics and other parts of mathematics (Proc. Sympos. Pure Math., Ohio State Univ., Columbus, Ohio, 1978)*, pp. 309–329, *Proc. Sympos. Pure Math., XXXIV, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979*.
- [**T**] H. Tachikawa: Quasi-Frobenius rings and generalizations. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 351. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.
- [**X1**] C. C. Xi: On the representation dimension of finite dimensional algebras. *J. Algebra* 226 (2000), no. 1, 332–346.
- [**X2**] C. C. Xi: Representation dimension and quasi-hereditary algebras, to appear in *Adv. Math.*

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HIMEJI INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHOSHA
2167, HIMEJI, 671-2201, JAPAN

iyama@sci.himeji-tech.ac.jp