QF-ring に関すること

- Ara, Nicholson および Yosif の結果の紹介 -

鍋谷　泰生

R : assosiative ring とする．Osofsky は "R : left or right perfect, $_RR$, R_R : injective $\Rightarrow$ R : QF" を示し, Faith は "R : left or right perfect, $_RR$: injective $\Rightarrow$ R : QF?" と予想した．この予想はある chain condition のもとでは正しいが, $_RR$ が local injective, $J^3 = 0$ のときでさえも open である．Ara, Nicholson および Yosif は vector space の bimap によりつくられるある種の ring が, いくつかの条件を満たすとき, 上の予想は正しくないことを示した (R : right perfect :$\Leftrightarrow$ $R/J(R)$ semisimple, $J(R)$: right T-nilpotent).

Definition 1. D : division ring, $_DV_D$, $_DP_D$: nonzero bimodules, $\phi\colon V \times V \to P\colon (v,w) \mapsto \phi(x,y)$: bimap に対し $xy:= \phi(x,y)$ と表すとき, $R:= D \oplus V \oplus P$ に multiplication を, $(d,v,p)(d_1,v_1,p_1):= (dd_1, dv_1+vd_1, dp_1+vv_1+pd_1)$ で定義する．このとき, R : assosiative semiprimary local ring で $J(R) = 0 \oplus V \oplus P$, $Soc(R_R) = 0 \oplus l_V(V) \oplus P$ である (R : semiprimary :$\Leftrightarrow$ $R/J(R)$ semisimple, $J(R)$: nilpotent, $l_V(V) = \{v \in V \mid vV = 0\}$).

以下, V, P, R は上のとおりとする．R : semiprimary より, Faith Conjecture "R : left or right perfect, $_RR$: injective $\Rightarrow$ R : QF?" で, perfect という条件は満たされている．ここでは QF-ring の定義を right artinian かつ right selfinective する．Ara, Nicholson および Yosif は, R が right artinian および right selfinjective になるための特徴付けを次のように与えた.

Proposition 2 ([1, Proposition 1]). 次は同値 (dim(-) は vector space としての 次元).
(1) R_R : artinian.
(2) R_R : noetherian.
(3) $\dim(V_D)<\infty$, $\dim(P_D)<\infty$.
(4) $\dim(R_D)<\infty$.

Bimap $\phi\colon V \times V \to P\colon (v,w) \mapsto vw:= \phi(x,y)$ について, 次の separation condition (S) を考える :

$$(\mathrm{S}) : 0 \neq x \in V,\ M \leq V_D \text{ に対し}, V = xD \oplus M \Rightarrow \exists\, v_0 \in V \text{ s.t. } v_0x \neq 0 \text{ かつ } v_0M = 0.$$

Proposition 3 ([1, Proposition 3]). $V \times V \to P$: bimap, $\sigma\colon {}_DV_D \to \mathrm{Hom}(V_D, D_D)$: $v \mapsto v\cdot$ ($v\cdot$ は bimap での left multiplication) に対し
(1) σ : mono $\iff$ $l_V(V) = 0$
(2) σ : epi $\iff$ Condition(S)

Theorem 4 ([1, Theorem 1]). 次は同値.
(1) R_R : injective.
(2) R_R : simple injective (i.e., simple image をもつ R の right ideal から R への linear map が, R のある element による left multiplication である).
(3) $l_V(V) = 0$, $\dim(P_D) = 1 = \dim(_DP)$, Condition S.

Ara, Nicholson, および Yosif は, R が QF とならないための十分条件を vector space の次元を用いて次のように与えた :

Theorem 5 ([1, Theorem 2]). $\exists\, V \times V \to P$: bimap over a division ring D s.t.
(1) $l_V(V) = 0,\ \dim(P_D) = 1 = \dim({}_DP)$.
(2) Condition (S).
(3) $\dim(V_D) = \infty$.
$\Rightarrow R$: counter example of Faith conjecture.

Proof. (1), (2) より R_R : injective だが, (3) より R_R : not artinian. ゆえに R : not QF.

Ara, Nicholson および Yosif は, 上の条件を満たすような bimap を構成するのは困難であろうと主張している. 実際, 以下のような簡単な bimap でさえも Theorem 5 の条件を満たさない.

N : natural number の集合として, $V := D^{(N)}$, $V \times V \to D \colon (v, w) \mapsto vw^T$: inner product とおくとき, これは Condition (S) を満たさない (他はみたす).

Proof. $\{\boldsymbol{e}_i\}$: canonical basis of V_D とするとき $\theta \colon V \mapsto D$ を, $\theta(\boldsymbol{e}_i) = 1,\ x = \boldsymbol{e}_1 d_1 + \cdots \boldsymbol{e}_n d_n$ に対し $\theta(x) = d_1 + \cdots + d_n$ とおくと θ : D-hom である. Proposition 3 より, もし $\theta = v\cdot$, $v = (d_1, d_2, ..., d_n, 0, 0, ...) \Rightarrow 1 = \theta(\boldsymbol{e}_{n+1}) = v\boldsymbol{e}_{n+1} = 0$: 矛盾.

Reference [1] Pere Ara, W.K. Nicholson and M.F. Yosif, A look at the Faith conjecture, Glasgow Math. J. **42** (2000) 391-404

鍋谷　泰生
大阪市立大学大学院理学研究科
数物系専攻後期博士課程 2 年