HOCHSCHILD COHOMOLOGY AND ALGEBRA HOMOMORPHISMS

長瀬　潤

1. 導入

Drozd（[5]）により、代数的閉体上の有限次元代数は、tame と wild と呼ばれるクラスに分けられることが示されている。これらのクラスの正確な定義は２章で与えられるが、代数が tame であるとは、任意の n に対して、n-次元直既約加群が有限個の 1-パラメーターで分類されるときを言い、代数が wild であるとは、n 次元直既約加群を分類するパラメーターの次元が n の増加と共に複雑に増加するため、分類に望みが持てないときを言う。

Crawley-Boevey は、[2] において、tame 代数上の有限次元直既約加群が各次元ごとに有限個を除いて、τ-invariant であることを示し、その逆が正しいことを予想した。ここで、τ は Auslander-Reiten translation DTr（[1] 参照）であり、加群 X が *τ-invariant* であるとは、$X \cong \tau X$ であるときを言う。τ-invariant 加群が含まれる AR-quiver の形が知られていることから、この予想は AR-quiver の様子で tame 代数を特徴付けるもである。

また、この予想は tame 代数を特徴付けるものであるが、対偶、「wild 代数は、ある次元に無限個の τ-variant 加群を持つ。」を考えることで、wild 代数の特徴付けとみなす。ここで、加群 X が *τ-variant* であるとは、$X \ncong \tau X$ であるときを言う。また、ある次元に無限個の τ-variant 加群を持つ代数を *τ-wild* と呼ぶことにすると、この予想は、任意の wild 代数が τ-wild であるとこを示すことと同値である。

一方、wild 代数の定義より、任意の wild 代数 B に対して、wild hereditary 代数 A と、代数の写像 $f : B \to A$ が存在して、f より導かれる関手 $f^* : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$ が embedding となる。embedding の定義は２章で与えられる。そして、de la Pena（[4]）の結果の特別な場合として、wild hereditary 代数は τ-wild であることが知られているので、f^* が τ-wildness を保存する為の条件に興味が持たれる。その条件の一つに、積写像 $A \otimes_B A \to A$ の kernel $\Omega_B A$ が現われる。実際 [8] において、$\Omega_B A$ が射影的 A-A-両側加群のとき、f^* が τ-wildness を保存することが示されている。このことから、$\Omega_B A$ の射影性に興味が移るが、この報告では、$\Omega_B A$ の射影性、非可換環の写像の smoothness と "relative'" Hochschild cohomology の関係が示される。smoothness と "relative'" Hochschild cohomology の定義はそれぞれ４章と５章で与えられる。

2. 準備

この報告を通して、k を代数的閉体とする。代数と言えば、k-代数を意味し、断りのないかぎり、k 上、有限次元とする。また、代数の間の写像は、単位元を保存するものとする。

$\operatorname{mod} A$ で有限次元右 A-加群の圏を表す。関手 $F : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$ が *embedding* であるとは、（１）F が exact かつ faithful、（２）X が直既約加群なら、FX も直既約加群、（３）$FX \cong FY$ ならば、$X \cong Y$、の３つの条件を満たすときを言う。

$\mathrm{k}\langle x, y\rangle$ で２変数の自由結合代数を表す。代数 A が *wild* であるとは、$\mathrm{k}\langle x, y\rangle$-$A$-両側加群 M が存在して、（１）M は $\mathrm{k}\langle x, y\rangle$ 上、有限ランクの自由加群、（２）関手 $- \otimes_{\mathrm{k}\langle x,y\rangle} M : \operatorname{mod} \mathrm{k}\langle x, y\rangle \to \operatorname{mod} A$ が embedding、の２つの条件を満たすときを言う。wild 代数上の有限次元直既約加群の分類には望みがないとされているが、その理由の一つとして、任意の有限生成 k-代数 R に対し、embedding $\operatorname{mod} R \to \operatorname{mod} \mathrm{k}\langle x, y\rangle$ が存在することが挙げられる。

この報告では、tame 代数について議論することはないが、wild 代数との比較のため、定義と例を与えておく。代数 A が *tame* であるとは、任意の自然数 n に対して、有限個の $\mathrm{k}[x]$-A-両側加群 $M_{n,1}, \dots, M_{n,i_n}$ で、左 $\mathrm{k}[x]$-加群として、ランク n の自由加群となるものが存在して、任意の n-次元直既約 A-加群が $\mathrm{k}[x]/(x-c) \otimes_{\mathrm{k}[x]} M_{n,j}$ （$c \in \mathrm{k}$、$j \in \{1, \dots, i_n\}$）の形で得られるときを言う。つまり、tame 代数上の n-次元直既約加群は、i_n 個の 1-パラメーター c によって分類される。有限次元代数ではないが、tame 代数の典型的な例として、１変数多項式環が挙げられる。混乱を避けるために、$A = \mathrm{k}[y]$ と置き、A の tameness を考える。任意の自然数 n に対して、左 $\mathrm{k}[x]$-加群 $M_{n,1}$ を $M_{n,1} = \mathrm{k}[x]^n$ と置く。$M_{n,1}$ の元 $(f_1(x), \dots, f_n(x))$ と A の生成元 y に対して、

$$(f_1(x), \dots, f_n(x))y = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \begin{pmatrix} x & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & x \end{pmatrix}$$

と置き、$M_{n,1}$ を 右 A-加群とみなす。このとき、任意の n-次元直既約 A-加群は $\mathrm{k}[x]/(x-c) \otimes_{\mathrm{k}[x]} M_{n,1}$ の形で与えられる。実際、n-次元直既約 A-加群はジョルダンブロックと対応している。

導入でも述べた様に、$\Omega_B A$ は積写像 $A \otimes_B A \to A$ の kernel で定義する。つまり、短完全列 $0 \to \Omega_B A \to A \otimes_B A \to A \to 0$ が与えられる。この定義は、可換環論における微分加群の定義とは、違うものであるが、次に説明する $\Omega_B A$ の特徴付けは、微分加群の特徴付け（[7] 参照）と類似していることから、この報告では、$\Omega_B A$ を **非**可換微分加群 と呼ぶことにする。

任意の A-A-両側加群 M に対して、$\mathrm{Der}_B(A, M)$ で A から M への B-derivation 全体の集合をあらわす。このとき、同型 $\mathrm{Hom}_{A-A}(\Omega_B A, M) \cong \mathrm{Der}_B(A, M)$ $(f \mapsto fd)$ を得る。ここで、$d : A \to \Omega_B A$ $(a \mapsto a \otimes 1 - 1 \otimes a)$。この同型写像は、$\Omega_B A$ の特徴付けを与えている。

3. 予想と非可換微分加群

ここでは、[8] の結果を用いて、Crawley-Boevey の予想と非可換微分加群の関係について説明する。導入の中で、説明したように、Crawley-Boevey の予想を示すことは、任意の wild 代数が τ-wild であることを示すことと同値である。そこで、任意に wild 代数 B をとってくると wild 代数の定義より、embedding $F : \operatorname{mod} \mathrm{k}\langle x, y\rangle \to \operatorname{mod} B$ が存在する。任意の代数 C に対して、embedding $\operatorname{mod} C \to \operatorname{mod} \mathrm{k}\langle x, y\rangle$ が存在することが知られているので、embedding $G : \operatorname{mod} C \to \operatorname{mod} B$ が存在することになる。特に、C として wild hereditary 代数をとってくる。[4] より、wild hereditary は τ-wild であることが知られているので、いつ、関手 G が τ-wildness を保存するかに興味が持たれる。

一方、関手 G は、exact かつ faithful であることから、C-B-両側加群 $G(C)$ は、C-加群として、射影的、かつ、generater になっている。よって、C と $\operatorname{End}_C(G(C))$ は森田同値になっている。その関手を $G' : \operatorname{mod} C \to \operatorname{mod} \operatorname{End}_C(G(C))$ とおく。また、$G(C)$ の C-B-両側加群としての構造から、代数の写像 $f : B \to \operatorname{End}_C(G(C))$ が存在する。このとき、G' と f から導かれる関手 $f^* : \operatorname{mod} \operatorname{End}_C(G(C)) \to \operatorname{mod} B$ の合成 $f^*G' : \operatorname{mod} C \to \operatorname{mod} B$ は、$G = f^*G'$ を満たす。

森田同値は τ-wildness を保存することから、f^* が τ-wildness を保存すれば、G も保存することになる。よって、代数の写像 $f : B \to A$ より導かれる関手 $f^* : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$ が、いつ、τ-wildness を保存するかに興味が移る。そこで、次ぎの結果を得る（[8] 参照）。

命題 3.1. 代数の写像 $f : B \to A$ において、関手 $f^* : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$ が *embedding* であるとする。このとき、非可換微分加群 $\Omega_B A$ が射影的 A-A-両側加群であれば、f^* は *τ-wildness* を保存する。

上の命題において、非可換微分加群の射影性は必ずしも必要ではないが、非可換微分加群が射影的になる例が幾つか存在することから、射影性について考察することに興味が持たれる。そこで、次の章では、その射影性と非可換環の写像の smoothness との関係について考察する。

4. 非可換微分加群と SMOOTHNESS

[3] において、Cuntz と Quillen は、可換環における smoothness の定義を非可換環に適用し、その環を quasi-free と呼んで扱っている。一方、[6] において、Le Bruyn は D.Quillen の名前の頭文字をとって、quasi-free のことを q-smooth と呼んでいる。ここでは、可換環の写像の smoothness（[7] 参照）の定義を非可換環の写像に適用した概念を区別せずに smooth と呼ぶことにする。以下に、写像の q-smooth の定義を与える。

代数の写像 $f : B \to A$ が *q-smooth* であるとは、任意の有限次元とは限らない代数の写像の全射 $s : C \to D$ で $(\operatorname{Ker} t)^2 = 0$ となるもの、そして、任意の代数の写像 $g : B \to C$ と $h : A \to D$ に対して、$hf = sg$ が成り立つとき、代数の写像 $t : A \to C$ が存在して、$g = tf$ かつ $h = st$ が成り立つときを言う。つまり、B-代数の写像 h と全射 s に対して、B-代数の写像 t が存在して、$h = st$ が成り立つときを考えている。

可換環論においては、微分加群と smoothness の間の関係がいくつか知られている ([7] 参照)。そこで、この章では、可換環論でのアイデアをもとに、非可換微分加群の射影性と q-smoothness との関係を示す。この関係を示す為に、3 つの補題を用意する。

次の補題は、微分加群と非可換微分加群の特徴付けの類似性から、[7] の Theorem 28.4 の証明と同じ方針で示される。

補題 4.1. 代数の写像 $f: B \to A$ において、$\mathrm{k} \to A$ が *smooth* であれば、次が同値：

(1) $f: B \to A$ が *smooth*；
(2) 任意の A-A-両側加群 M に対して、$\mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(A, M) \to \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(B, M)$ が全射；
(3) $A \otimes_B \Omega_{\mathrm{k}} B \otimes_B A \to \Omega_{\mathrm{k}} A$　$(a \otimes b \otimes a' \mapsto aba')$　が分裂単射。

次の補題は、上の補題の (3) における写像の kernel と cokernel を考えたものである。

補題 4.2. 代数の写像 $f: B \to A$ と、A-A-両側加群の写像 $A \otimes_B \Omega_{\mathrm{k}} B \otimes_B A \to \Omega_{\mathrm{k}} A$ $(a \otimes b \otimes a' \mapsto aba')$ に対して、次の *exact sequence* を得る。

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^B(A, A) \to A \otimes_B \Omega_{\mathrm{k}} B \otimes_B A \to \Omega_{\mathrm{k}} A \to \Omega_B A \to 0$$

Proof. B-B-両側加群の short exact sequence $0 \to \Omega_{\mathrm{k}} B \to B \otimes_{\mathrm{k}} B \to B \to 0$ に関手 $A \otimes_B -$ と $- \otimes_B A$ を順にかけることによって exact sequence

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^B(A, A) \to A \otimes_B \Omega_{\mathrm{k}} B \otimes_B A \to A \otimes_{\mathrm{k}} A \to A \otimes_B A \to 0$$

を得る。この exact sequence と、次の short exact sequence の可換図式より、求める exact sequence が得られる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega_{\mathrm{k}} A & \longrightarrow & A \otimes_{\mathrm{k}} A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega_B A & \longrightarrow & A \otimes_B A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

f と g は共に全射で、$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$。 □

次の補題の証明は、[3] を参照。

補題 4.3. 代数 A において、次が同値：

(1) $\mathrm{k} \to A$ が *smooth*；
(2) A が *hereditary*；
(3) $\Omega_{\mathrm{k}} A$ が射影的 A-A-両側加群。

以上の 3 つの補題より、直ちに、次の命題が示される。

命題 4.1. 代数の写像 $f: B \to A$ において、$\Omega_B A$ が射影的 A-A-両側加群であれば、次が同値：

(1) $f: B \to A$ が *smooth*；
(2) $\mathrm{Tor}_1^B(A, A) = 0$ かつ $\Omega_B A$ が射影的 A-A-両側加群。

この命題をふまえて、次の章では非可換微分加群と relative Hochschild cohomology 関係について考察する。

5. 非可換微分加群と relative Hocoschild cohomology

この章では、代数 A に対して、$A^e = A \otimes_{\mathrm{k}} A^{\mathrm{op}}$ と置き、A-A-両側加群を A^e-加群とみなす。自然数 n と A^e-加群 M に対して、A の n 番目 M 係数 Hochschild cohomology $\mathrm{H}^n(A, M)$ を $\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M)$ で定義する。このとき、代数の写像 $f : B \to A$ は長完全列

$$\cdots \to \mathrm{H}^n(A, M) \to \mathrm{H}^n(B, M) \to \mathrm{H}^n(f, M) \to \mathrm{H}^{n+1}(A, M) \to \cdots$$

を導く。この報告では、$\mathrm{H}^n(f, M)$ を n 番目 M 係数 relative Hochschild cohomology と呼ぶことにする。

以下で、relative Hochschild cohomology と非可換微分加群の関係を見る為に、次の命題を用意する。

命題 5.1. 代数の写像 $f : B \to A$ と A^e-加群 M に対して、$\Omega_B A$ が射影的 A^e-加群であるとき、次の完全列が存在する。

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{A^e}(\Omega_B A, M) \to \mathrm{H}^1(f, M) \to \mathrm{Hom}_{A^e}(\mathrm{Tor}^B_1(A, A), M) \to \mathrm{Ext}^2_{A^e}(\Omega_B A, M).$$

Proof. B^e-加群の写像 $h : B \to A^e \otimes_{B^e} B, (b \mapsto 1 \otimes b)$ と A^e-加群の同型 $A^e \otimes_{B^e} B \cong A \otimes_B A$ により、単写 $h_1 : \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A \otimes_B A, M) \to H^1(B, M)$ が導かれる。h_1 は単写 $h_2 : \mathrm{Ext}^1_{A^e}(\Omega_B A, M) \to H^1(f, M)$ を導き、次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1_{A^e}(A, M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A \otimes_B A, M) \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & \mathrm{Ext}^1_{A^e}(\Omega_B A, M) \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & \mathrm{Ext}^2_{A^e}(A, M) = 0 \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}^1(A, M) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(B, M) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(f, M) \arrow[r] & \mathrm{H}^2(A, M) = 0
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ext}^2_{A^e}(A, M) = \mathrm{H}^2(A, M) = 0$ は $\mathrm{Ext}^2_{A^e}(A, M) \cong \mathrm{Ext}^1_{A^e}(\Omega A, M)$ と ΩA が射影的 A^e-加群であることから、導かれる。一方、可換図式、

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega B \arrow[r] \arrow[d] & B \otimes B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & A \otimes A \arrow[r] & A \otimes_B A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

より、次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes A, M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{A^e}(K, M) \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A \otimes_B A, M) \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_{B^e}(B \otimes B, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{B^e}(\Omega B, M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{B^e}(B, M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を得る。よって、$\mathrm{Cok}\, h_2 \cong \mathrm{Cok}\, h_1 \cong \mathrm{Cok}\, h_3$ が成り立つ。また、補題 4.2 の証明を見ると、短完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^B_1(A, A) \longrightarrow A \otimes_B \Omega_{\mathrm{k}} B \otimes_B A \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

が存在するが、この短完全列と adjointness を使って、次の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Cok}\, h_3 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A^e}(\mathrm{Tor}^B_1(A, A), M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{A^e}(K, M)$$

を得る。最後に、ΩA が射影的 A^e-加群であることから、$\mathrm{Ext}^1_{A^e}(K,M)\cong\mathrm{Ext}^2_{A^e}(\Omega_B A,M)$ が言えるので、命題の完全列が得られる。 □

上の命題 5.1 と命題 4.1 より、次の結果が導かれる。

定理 5.1. 代数の写像 $f:B\to A$ に対して、ΩA が射影的 A^e-加群のとき、次が同値：
(1) $f:B\to A$ が *smooth*；
(2) $\mathrm{Tor}^B_1(A,A)=0$ かつ $\Omega_B A$ が射影的 A^e-加群；
(3) 任意の A^e-加群 M に対して、$\mathrm{H}^1(f,M)=0$。

最後に、上の定理において、代数 A が行列環のときを考察する。

系 5.1. 代数の写像 $f:B\to A$ に対して、A が行列環 $M_n(\mathrm{k})$ のとき、次が同値：
(1) $f:B\to A$ が *smooth*；
(2) $\mathrm{Tor}^B_1(A,A)=0$；
(3) 任意の A^e-加群 M に対して、$\mathrm{H}^1(f,M)=0$；
(4) $\mathrm{Ext}^1_B(N_f,N_f)=0$。
ここで、f は B の表現を与えているので、それに対応する B-加群を N_f とした。

Proof. $A^e\cong M_{n^2}(\mathrm{k})$ と $\mathrm{H}^1(B,A)\cong\mathrm{Ext}^1_{B^e}(N_f,N_f)$ より示される。 □

References

[1] Auslander, M., Reiten, I. and Smalø, O.: *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics **36**, Cambridge Univ. Press.
[2] Crawley-Boevey, W. W.: *On tame algebras and bocses*, Proc. London Math. Soc. (3) **56**, 1988, 451–483.
[3] Cuntz, J., Quillen, D.: *Algebra extentions and nonsingularity*, J. Amer. Math. Soc. **8**, 1995, 251–289.
[4] de la Peña, J.A.: *On the dimension of the module-varieties of tame and wild algebras*, Comm. in Alg. **19(6)**, 1991, 1795–1807.
[5] Drozd, Yu. A.: *Tame and wild matrix problems*, in "Representations and Quadratic Forms", Institute of Mathematics, Academy of Sciences, Ukrainian SSR, Kiev, 1979, 39–74; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. **128**, 1986, 31–55.
[6] Le Bruyn, L.: *Noncommutative geometry @n*, **http://xxx.lanl.gov/math.AG/9904171**, 1999, 14pp.
[7] Matsumura, H.: *Commutative ring theory*, Cambridge studies in advanced mathematics **8**, Cambridge Univ. Press.
[8] Nagase, H.: *τ-wild algebras*, to appear.
[9] Stenström, S.: *Ring of Quotients*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **217**, Springer-verlag.

Hiroshi Nagase
Department of Mathematics, Osaka City University,
3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka, 558-8585, Japan
nagase@sci.osaka-cu.ac.jp