Association scheme の thin residue と指標の重複度

信州大学大学院　工学系研究科　数理・自然情報科学専攻　　吉川　昌慶

1　定義

X を有限集合とし $X \times X$ の分割

$$X \times X = \bigcup_{g \in G} g \quad \text{(disjoint)}$$

を考える。$g \in G$ に対して隣接行列 σ_g を考える。すなわち σ_g は $X \times X$ で添字の付けられた行列で $(x, y) \in g$ のときその成分は 1 で、そうでないときには 0 である。

(X, G) が association scheme であるとは、

(1) $1 = \{(x, x) \mid x \in X\} \in G$

(2) $g \in G$ ならば $g^* = \{(y, x) \mid (x, y) \in g\} \in G$

(3) 任意の $f, g, h \in G$ に対して $\sigma_f \sigma_g = \sum_{h \in G} a_{fgh} \sigma_h$ となる a_{fgh} がある

の３つの条件を満たすことをいう。このとき a_{fgh} は非負整数である。(X, G) を単に G と書くことにする。

$x \in X$、$g \in G$ に対して $xg = \{y \in X \mid (x, y) \in g\}$ とする。$H \subseteq G$ に対しても $xH = \bigcup_{h \in H} xh$ とする。$f, g \in G$ に対して $fg = \{h \in G \mid a_{fgh} \neq 0\}$ とする。G の部分集合などについても同様である。

Association scheme の定義から $|xg|$ は $x \in X$ の取り方によらず $g \in G$ のみで定まる。これを g の valency といい、n_g で表す。

$H \subseteq G$ について $n_H = \sum_{h \in H} n_h$、$\sigma_H = \sum_{h \in H} \sigma_h$ とする。特に、$n_G = |X|$ で、これを association scheme の order という。

$H \subseteq G$ が closed subset であるとは、$HH \subseteq H$ を満たすことをいい、$H \leqq G$ と書く。この定義は [8] の定義と異なるが、$|X| < \infty$ のときは、[8,Theorem1.4.1] より、同値となる。Closed subset H が normal closed subset であるとは、任意の $g \in G$ に対して $gH = Hg$ となることをいい、$H \trianglelefteq G$ と書く。Closed subset H が strongly normal closed subset であるとは、任意の $g \in G$ に対して $g^* H g \subseteq H$ となることをいい、$H \trianglelefteq^\sharp G$ と書く。Closed subset H が strongly normal closed subset ならば、normal closed subset である。

H を G の closed subset とする。$X/H = \{xH \mid x \in X\}$ とする。$g \in G$ に対して $g^H = \{(xH, yH) \in X/H \times X/H \mid y \in xHgH\}$ とし、$G/\!/H = \{g^H \mid g \in G\}$ とする。このとき、$(X/H, G/\!/H)$ は association scheme になる。これを (X, G) の H による factor scheme という。

Association scheme (X, G) に対して、定義の条件 (3) より、自然に代数が定義できる。単位元を持つ可換環 R に対して

$$RG = \bigoplus_{g \in G} \; R\sigma_g$$

に行列の積で代数構造を入れたものを G の R 上の隣接代数という。[8,Theorem4.1.3] により、標数 0 の体上の隣接代数は半単純であることが知られている。特に、$\mathbb{C}G$ は半単純である。

2 Thin residue

任意の $g \in G$ に対して、$n_g = 1$ であるとき、G は thin であるという。thin association scheme は本質的に有限群であり、その隣接代数は群環に同型である。

$H \leqq G$ とする。このとき、

$$O^{\theta}(H) = \bigcap_{K \trianglelefteq^{\sharp} H} \; K$$

を H の thin residue という。

定理 1 ([8],Theorem2.3.4)

(1)$(X/O^{\theta}(G), G/\!/O^{\theta}(G))$ は thin

(2)$H \leqq G$ を $(X/H, G/\!/H)$ が thin となるような closed subset とする。このとき、$O^{\theta}(G) \subseteq H$

3 標準指標

Association scheme の表現とは、その隣接代数の線形表現のことをいう。以後複素数体上の表現のみを考える。指標とは、$\mathbb{C}G$ の表現の trace 関数とする。

$\mathbb{C}G$ の既約指標全体の集合を $Irr(G)$ と表す。$\mathbb{C}G$ はもともと行列環として定義されているので、自然な表現がある。つまり、

$$\begin{aligned} \gamma_G : \mathbb{C}G &\to M_n(\mathbb{C}) \\ \sigma_g &\mapsto \sigma_g \end{aligned}$$

を考える。

これを標準表現、その指標を標準指標という。標準指標も同じ γ_G で表す。標準指標の既約分解を

$$\gamma_G = \sum_{\chi \in Irr(G)} \; m_\chi \chi$$

とし、m_χ を単に χ の重複度をいう。

命題 2 ([6],Lemma2.2)

$\chi \in Irr(G)$ に対して、$m_\chi \geqq \chi(1)$ である。特に $m_\chi \neq 0$ である。

4　問題

命題2より、$\chi \in Irr(G)$ に対して、$m_\chi \geq \chi(1)$ が成り立つ。ここで、いつ等しくなるかが知りたい。これに対して、次の補題がある。

補題 3 ([6],Lemma3.1)
$\chi \in Irr(G/\!/O^\theta(G))$ ならば、$m_\chi = \chi(1)$

この補題の逆を考えたい。

予想　$\chi \in Irr(G)$ とする。
$m_\chi = \chi(1)$ ならば、$\chi \in Irr(G/\!/O^\theta(G))$

この問題に対して、$m_\chi = \chi(1) = 1$ の場合に [6] によって肯定的に解決されている。

定理 4 ([6],Theorem3.2)
$\chi \in Irr(G)$ とする。このとき、
$m_\chi = 1$ if and only if $\chi \in Irr(G/\!/D(G))$

定理4により、つぎが成り立つ。

定理 5 ([6])
Commutative association scheme に対して、予想が成り立つ。

Association schemeの典型的な例として、置換群から得られる association scheme がある。
置換群から得られる association scheme について予想が成り立つことがわかった。

定理 6 Gを置換群から得られる association schemeとする。このとき、$\chi \in Irr(G)$ に対して、
$m_\chi = \chi(1)$ ならば、$\chi \in Irr(G/\!/O^\theta(G))$