整環の Ringel-Hall 代数[1]

伊山 修

遺伝代数 (=大域次元 1 の代数) の表現を幾何学的に捉えれたものが, quiver の表現であるが, それがルート系の理論と深く関係している事は, Gabriel や Kac らによって古くから知られていた (§1.2.1)([DR][BGP][GR][K]). この現象の説明として Ringel は, Hall 代数の手法を有限次遺伝代数に適用する事により, 量子群が構成される事を示した (§1.2.2)([R2][G]). この事実は, 後の Lusztig による量子群の標準基底の構成の先駆けとなった [L1,2]. 本稿の目的は, 有限次代数と並んで基本的な対象である整環に対して, その Hall 代数を考察する事にある. 特に, $U(\mathfrak{sl}_n)$ 及びその既約表現のある族が, Hall 代数の手法によりごく自然に構成できる事を示す (§2.2.5)[I4].

以下では, 環 Λ に対して J_Λ で Λ の Jacobson 根基を表し, 加群は全て左加群を意味するものとする. $\mathrm{mod}\,\Lambda$ (resp. $\mathrm{fin}\,\Lambda$) で有限生成 Λ-加群 (resp. 元の個数が有限の Λ-加群) の圏を表す. $X \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ に対し, $[X]$ で X を含む同型類を表す事にする.

1 Ringel-Hall 代数

環 Λ が**有限的**であるとは, 任意の $X, Y \in \mathrm{fin}\,\Lambda$ に対して $\#\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,Y) < \infty$ となる事を意味するものとする [R1]. 以下, Λ は有限的であるとする. Λ-加群 X, Y, Z に対し, F^Y_{XZ} で, Y の部分加群 W で $W \simeq Z$ かつ $Y/W \simeq X$ となるものの個数を表す. この時, **(Ringel)Hall 代数** $\mathcal{H}(\Lambda)$ が, $(u_X)_{X\in[\mathrm{fin}\,\Lambda]}$ を基底に持つ自由 $\mathbb{Z}$-加群に積を $u_X u_Z := \sum_{Y\in[\mathrm{fin}\,\Lambda]} F^Y_{XZ} u_Y$ と定める事により定義される [R1]. $\mathcal{H}(\Lambda)$ は単位元 u_0 を持つ環を成す.

1.1 例 Λ が離散付値環の時は, $[\mathrm{fin}\,\Lambda]$ は自然数の分割と一対一に対応する. 分割 $(1^{l_1}2^{l_2}3^{l_3}\cdots)$ には, Λ-加群 $\bigoplus_{i>0}(\Lambda/J^i_\Lambda)^{\oplus l_i}$ が対応する. この時, $\mathcal{H}(\Lambda)$ が無限変数多項式環 $\mathbb{Z}[u_{(1)}, u_{(1^2)}, u_{(1^3)}, \cdots]$ に同型になる事は良く知られている [M].

1.2 有限次遺伝代数 Δ を Dynkin quiver とし, $\mathfrak{g}$ を対応する単純 Lie 代数とする. $k\Delta$ を有限体 k 上の path 代数とする時, $\mathcal{H}(k\Delta)$ と量子群 $U^+_v(\mathfrak{g})$ は, 以下で述べる様に密接に関係する.

1.2.1 定理 (Gabriel)[GR] 任意の体 k に対し, $\mathfrak{g}$ の正ルート全体 Φ^+ と, $[\mathrm{mod}\,k\Delta]$ の中で直既約なもの全体の間に, 全単射が存在する.

特に k が有限体の時は, Φ^+ で生成される自由アーベル半群 $\Pi := \mathbb{N}_{\ge 0}\Phi^+$ に対し, 全単射 $M_k : \Pi \to [\mathrm{fin}\,k\Delta]$ を得る. この時, 任意の $\lambda, \mu, \nu \in \Pi$ に対し, **Hall 多項式**と呼ばれる $\phi^\mu_{\lambda\nu} \in \mathbb{Z}[v]$ で, 任意の有限体 k に対して $F^{M(\mu)}_{M(\lambda)M(\nu)} = \phi^\mu_{\lambda\nu}(\#k)$ が成立するものが存在する [R1]. また, **Euler 形式**と呼ばれる写像 $\langle\ ,\ \rangle : \Pi \times \Pi \to \mathbb{Z}$ で, 任意の有限体 k に対して $\langle \lambda, \nu \rangle = \dim_k \mathrm{Hom}_{k\Delta}(M_k(\lambda), M_k(\nu)) - \dim_k \mathrm{Ext}^1_{k\Delta}(M_k(\lambda), M_k(\nu))$ が成立するものが存在する [R2]. この時**一般 Hall 代数** $\mathcal{H}^*(\Delta)$ が, $(u_\lambda)_{\lambda\in\Pi}$ を基底に持つ自由 $\mathbb{Z}[v]$-加群に積を $u_\lambda u_\nu = v^{\langle\lambda,\nu\rangle}\sum_{\mu\in\Pi}\phi^\mu_{\lambda\nu}(v^2)u_\mu$ と定める事により定義される.

[1] The detailed version of this paper will be submitted elsewhere.

1.2.2 定理 (Ringel)[R2] $\mathcal{H}^*(\Delta)\otimes_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]}\mathbb{Q}(v)$ は $U_v^+(\mathfrak{g})$ に同型.

1.2.3 例 Δ を A_3 に向きを $\bullet\to\bullet\to\bullet$ と付けた Dynkin quiver とする. この時, path 代数 $k\Delta$ は $\begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ に同型になる. Φ^+ は次の左図で与えられ, 対応する $[\operatorname{fin} k\Delta]$ の直既約対象は右図で与えられる. ここで矢印は, 圏 $\operatorname{fin} k\Delta$ の構造を与える Auslander-Reiten quiver を記している ([ARS] 参照). 同型 $\mathcal{H}^*(\Delta)\otimes_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]}\mathbb{Q}(v)\to U_v^+(\mathfrak{g})$ は, 対応 $u_{\alpha_i}\mapsto e_i$ $(i=1,2,3)$ により与えられる.

$$\begin{array}{ccccc} & & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & & \\ & \alpha_1+\alpha_2 & & \alpha_2+\alpha_3 & \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 \end{array}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix} \arrow[dl] & & \\
 & \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k \end{pmatrix} \arrow[dl] & & \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[ul] & & \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

2 整環の Ringel-Hall 代数

以下では, R を完備離散付値環, k を剰余体, K を商体とし, $p:=\#k$ が有限であると仮定する. R-代数 Λ が R-**order**(=R-**整環**) であるとは, R-加群として有限生成射影的である事を意味する ([CR][Re]). この時, Λ は有限的であるので, Hall 代数 $\mathcal{H}(\Lambda)$ が 1 章により定義される. また, Λ は有限次 K-代数 $\Lambda\otimes_R K$ の部分環とみなされる. R-order Λ 上の加群 L が Λ-**lattice** であるとは, R-加群として有限生成射影的である事を意味する. Λ-lattice の圏を $\operatorname{lat}\Lambda$ で表す. 任意の $X\in\operatorname{mod}\Lambda$ に対し, 完全列 $0\to TX\to X\to FX\to 0$ で $TX\in\operatorname{fin}\Lambda$, $FX\in\operatorname{lat}\Lambda$ となるものがただ一つ存在する.

以下, Hall 代数の手法を応用する事により, $\mathcal{H}(\Lambda)$-加群の族を構成する. $m>0$ に対し, $\operatorname{lat}_m\Lambda$ で, $L\in\operatorname{lat}\Lambda$ のうち, $L\otimes_R K$ の $(\Lambda\otimes_R K)$-加群としての長さが丁度 m であるもの全体の成す圏を表す事にする. Jordan-Zassenhaus の定理より, $[\operatorname{lat}_m\Lambda]$ は有限集合である ([CR][Re]). $(u_L)_{L\in[\operatorname{lat}_m\Lambda]}$ を基底に持つ自由 $\mathbb{Z}$-加群を $\mathcal{M}_m(\Lambda)$ で表す. $u_X\in\mathcal{H}(\Lambda)$ の $\mathcal{M}_m(\Lambda)$ への作用を $u_Xu_M:=\sum_{L\in[\operatorname{lat}_m\Lambda]}F_{XM}^L u_L$ $(M\in[\operatorname{lat}_m\Lambda])$ により定義すると, $\mathcal{M}_m(\Lambda)$ は $\mathcal{H}(\Lambda)$-加群を成す. これを **Hall 加群**と呼ぶ事にする. 次節では, この様なものを考える動機となった, Solomon のゼータ関数に付いて少し紹介する ([S1,2][BR][I1,3,5]).

2.1 複素変数 s と $L,M\in[\operatorname{lat}_m\Lambda]$ に対し, $\mathrm{Z}(L,M;s):=\sum_{N\subseteq L,\ [N]=[M]}\#(L/N)^{-s}$ と置き, $n\times n$ の**ゼータ行列** $\mathbf{Z}_\Lambda(m;s):=(\mathrm{Z}(L,M;s))_{L,M\in[\operatorname{lat}_m\Lambda]}$ $(n:=\#[\operatorname{lat}_m\Lambda])$ を定める. この時次が分かる.

(1) 形式 Dirichlet 級数 $D(s):=\sum_{X\in[\operatorname{fin}\Lambda]}u_X(\#X)^{-s}$ の $\mathcal{M}_m(\Lambda)$ への作用は, ゼータ行列 $\mathbf{Z}_\Lambda(m;s)$ により与えられる.

(2) $D(s)^{-1}=\prod_{X\in[\operatorname{fin}\Lambda],\ X:\mathrm{simple}}(\sum_{i=0}^\infty(-1)^i u_{X^i}(\#X)^{\frac{i(i-1)}{2}-s})$.

(3) 十分大きな i に対し, $u_{X^i}\,\mathcal{M}_m(\Lambda)=0$.

証明 (1) のみ示す. $M\in[\operatorname{lat}_m\Lambda]$ に対し, 次の計算より主張が従う.

$$D(s)\cdot u_M \;=\; \sum_{X\in[\operatorname{fin}\Lambda]}u_Xu_M(\#X)^{-s}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{L\in[\mathrm{lat}_m \Lambda]} u_L \sum_{X\in[\mathrm{fin}\,\Lambda]} F^L_{XM}(\#X)^{-s} \\
&= \sum_{L\in[\mathrm{lat}_m \Lambda]} u_L \mathrm{Z}(L,M;s) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

2.1.1 これより次の命題が直ちに得られる．より強く $\det \mathbf{Z}_\Lambda(m;s)$ を求める事は, アルチン代数の表現次元とも関係した興味深い問題で, 詳細は [I1,2,3,5] 参照.

命題 (Solomon)[S1] $\mathbf{Z}_\Lambda(m;s)^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}[p^{-s}])$.

2.2 遺伝 order の Hall 代数と $U(\mathfrak{gl}_n)$

以下 [I4] に従う．order Λ が**遺伝的**とは $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda = 1$ となる事であった．$\Delta = \widetilde{A}_{n-1}$ を n 個の頂点を持つ巡回 quiver とし, 頂点の集合 Δ_0 を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と同一視する．order Λ が Δ **型**であるとは, ある離散付値環 Ω が存在して

$$
\Lambda = \begin{pmatrix}
\Omega & J_\Omega & J_\Omega & \cdots & J_\Omega & J_\Omega \\
\Omega & \Omega & J_\Omega & \cdots & J_\Omega & J_\Omega \\
\Omega & \Omega & \Omega & \cdots & J_\Omega & J_\Omega \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\Omega & \Omega & \Omega & \cdots & \Omega & J_\Omega \\
\Omega & \Omega & \Omega & \cdots & \Omega & \Omega
\end{pmatrix} \quad (\subseteq \mathrm{M}_n(\Omega))
$$

となる事とする．この時 $q_\Lambda := \#(\Omega/J_\Omega)$ と置く．Δ 型の order は遺伝的であり, 逆に全ての遺伝 order はそのような order の直積に森田同値である ([CR][Re])．例えば, 完備 path 多元環 $k\Delta$ は, $\Omega = k[[x]]$ に対して, Δ 型の order となる事が分かる．

2.2.1 Λ は Δ 型の order とする．$[\mathrm{lat}\,\Lambda]$ の直既約対象は次の n 個である事が分かる．

$$
P_1 = \begin{pmatrix} \Omega \\ \Omega \\ \Omega \\ \cdots \\ \Omega \\ \Omega \end{pmatrix},\
P_2 = \begin{pmatrix} J_\Omega \\ \Omega \\ \Omega \\ \cdots \\ \Omega \\ \Omega \end{pmatrix},\
P_3 = \begin{pmatrix} J_\Omega \\ J_\Omega \\ \Omega \\ \cdots \\ \Omega \\ \Omega \end{pmatrix}, \cdots,\
P_{n-1} = \begin{pmatrix} J_\Omega \\ J_\Omega \\ J_\Omega \\ \cdots \\ \Omega \\ \Omega \end{pmatrix},\
P_n = \begin{pmatrix} J_\Omega \\ J_\Omega \\ J_\Omega \\ \cdots \\ J_\Omega \\ \Omega \end{pmatrix}
$$

また, $[\mathrm{fin}\,\Lambda]$ の直既約対象は次で与えられる．

$$
\{S_{ij} := P_i/J_\Lambda^j P_i \mid (i,j) \in \Delta_0 \times \mathbb{N}\}
$$

各 $i \in \Delta_0$ に対し S_{i1} は単純加群である．S_{ij} の長さは j であり, top は S_{i1} である．

(1) Π で n 個の分割の組全体を表す事にする．Π の元 λ は $\lambda = (1^{l_{i1}}2^{l_{i2}}3^{l_{i3}}\cdots)_{i\in\Delta_0}$ と表される．$M(\lambda) := \bigoplus_{(i,j)\in\Delta_0\times\mathbb{N}} S_{ij}^{l_{ij}}$ と置く事により, 全単射 $M = M_\Lambda : \Pi \to [\mathrm{fin}\,\Lambda]$ を得る．単純加群 S_{i1} $(i \in \Delta_0)$ に対応する Π の元を, **単純**と呼ぶ.

(2) 集合 Π_m^∞ を, $\mu = (m_i)_{i\in\Delta_0}$ で $m_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ かつ $\sum_{i\in\Delta_0} m_i = m$ なるもの全体とする．$M(\mu) := \bigoplus_{i\in\Delta_0} P_i^{m_i}$ と置く事により, 全単射 $M = M_\Lambda : \Pi_m^\infty \to [\mathrm{lat}_m\,\Lambda]$ が得られる．

2.2.2 命題 $\lambda, \mu, \nu \in \Pi$ (resp. $\lambda \in \Pi$ かつ $\mu, \nu \in \Pi_m^\infty$) とする．

(1) **Hall 多項式**と呼ばれる $\phi_{\lambda\nu}^\mu \in \mathbb{Z}[v]$ で, 任意の Δ 型の order Λ に対して $F^{M(\mu)}_{M(\lambda)M(\nu)} = \phi^\mu_{\lambda\nu}(q_\Lambda)$ が成立するものが存在する ([Gu][I4]).

(2) ある $\langle\lambda,\nu\rangle \in \mathbb{Z}$ で, 任意の Δ 型の order Λ に対して $q_\Lambda^{\langle\lambda,\nu\rangle} = \frac{\#\operatorname{Hom}_\Lambda(M_k(\lambda),M_k(\nu))}{\#\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M_k(\lambda),M_k(\nu))}$ となるものが存在する.

2.2.3 定義 (1) **一般 Hall 代数** $\mathcal{H}^*(\Delta)$ が, $(u_\lambda)_{\lambda\in\Pi}$ を基底に持つ自由 $\mathbb{Z}[v]$-加群に積を $u_\lambda u_\nu = v^{\langle\lambda,\nu\rangle}\sum_{\mu\in\Pi}\phi^\mu_{\lambda\nu}(v^2)u_\mu$ と定める事により定義される. $n=1$ の時, $\mathcal{H}^*(\Delta)$ は古典的 Hall 代数 [M] である. 単純な λ に対応する u_λ 全体から生成される $\mathcal{H}^*(\Delta)$ の部分代数を $\mathcal{C}^*(\Delta)$ と表し, **一般 composition 代数**と呼ぶ.

(2) **一般 Hall 加群**と呼ばれる $\mathcal{H}^*(\Delta)$-加群 $\mathcal{M}^*_m(\Delta)$ を, $(u_\mu)_{\mu\in\Pi^\infty_m}$ を基底に持つ自由 $\mathbb{Z}[v]$-加群に作用を $u_\lambda u_\nu = v^{\langle\lambda,\nu\rangle}\sum_{\mu\in\Pi^\infty_m}\phi^\mu_{\lambda\nu}(v^2)u_\mu$ ($\lambda\in\Pi$, $\nu\in\Pi^\infty_m$) と定める事により定義する.

2.2.4 定理 (1)[R3] $\mathcal{C}^*(\Delta)\otimes_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]}\mathbb{Q}(v)$ は $U_v^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ に同型.
(2)[Sc] $\mathcal{H}^*(\Delta)\otimes_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]}\mathbb{Q}(v)$ は $U_v^+(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ に同型.

2.2.5 さて, $\mathcal{H}^*_m(\Delta)\otimes_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]}\mathbb{Q}(v)$ の $U_v^+(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$-加群としての構造に興味が湧くが, 残念ながら現在の所一般には計算出来ていないため, 以下は $v=1$ における結果を記す.

$\mathcal{H}^*(\Delta)^{\mathbb{C}}_1 := \mathcal{H}^*(\Delta)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}/(v-1)$ および $\mathcal{M}^*_m(\Delta)^{\mathbb{C}}_1 := \mathcal{M}^*_m(\Delta)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}/(v-1)$ と置くと, $\mathcal{M}^*_m(\Delta)^{\mathbb{C}}_1$ は $\mathcal{H}^*(\Delta)^{\mathbb{C}}_1$-加群を成す. 自然な全射 $U^+(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)\to U(\mathfrak{gl}_n)$ が存在するが, 以下に述べる様に, 実は $\mathcal{M}^*_m(\Delta)^{\mathbb{C}}_1$ は $U(\mathfrak{gl}_n)$-加群を成している事が分かる. e_i を (i,i)-成分が 1 で他が 0 である $\mathfrak{gl}_n$ の元とし, $h_i := e_i - e_{i+1}$ と置く. ω_1 を, $\omega_1(h_i)=\delta_{1i}$ ($1\le i<n$) により定義される $\mathfrak{sl}_n$ の基本ウェイトとする.

定理 [I4] $\mathcal{H}^*(\Delta)^{\mathbb{C}}_1$ の両側イデアル I で以下の性質を満たすものが存在する.
(1) $\mathcal{H}^*(\Delta)^{\mathbb{C}}_1/I$ は $\mathfrak{gl}_n$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ に同型.
(2) 任意の $m\in\mathbb{N}$ に対し, $\mathcal{H}^*(\Delta)^{\mathbb{C}}_1$-加群 $\mathcal{M}^*_m(\Delta)^{\mathbb{C}}_1$ は $I\,\mathcal{M}^*_m(\Delta)^{\mathbb{C}}_1 = 0$ を満たし, $\mathcal{M}^*_m(\Delta)^{\mathbb{C}}_1$ の $U(\mathfrak{sl}_n)$ への制限は最高ウェイトが $m\omega_1$ の $\binom{m+n-1}{n-1}$ 次元既約加群である.

特に $n=2$ の場合, $(\mathcal{M}^*_m(\Delta)^{\mathbb{C}}_1)_{m\in\mathbb{N}}$ は全ての有限次既約 $U(\mathfrak{sl}_2)$-加群を与える. 一般に, 全ての既約 $U(\mathfrak{sl}_n)$-加群を Hall 代数の手法で実現する事は, 興味深い問題と思われる.

References

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalo: Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[BGP] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev: Coxeter functors, and Gabriel's theorem. (Russian) Uspehi Mat. Nauk 28 (1973), no. 2(170), 19–33.

[BR] C. J. Bushnell, I. Reiner: Zeta functions of arithmetic orders and Solomon's conjectures. Math. Z. 173 (1980), no. 2, 135–161.

[CR] C. W. Curtis, I. Reiner: Methods of representation theory. Vol. I. With applications to finite groups and orders. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.

[DR] V. Dlab, C. M. Ringel: Indecomposable representations of graphs and algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 6 (1976), no. 173.

[GR] P. Gabriel, A. V. Roĭter: Representations of finite-dimensional algebras. Encyclopaedia Math. Sci., 73, Algebra, VIII, 1–177, Springer, Berlin, 1992.

[G] J. A. Green: Hall algebras, hereditary algebras and quantum groups. Invent. Math. 120 (1995), no. 2, 361–377.

[Gu] J. Guo: The Hall polynomials of a cyclic serial algebra. Comm. Algebra 23 (1995), no. 2, 743–751.

[I1] O. Iyama: A proof of Solomon's second conjecture on local zeta functions of orders, J. Algebra 259 (2003), no. 1, 119-126.

[I2] O. Iyama: Finiteness of Representation dimension, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 4, 1011-1014.

[I3] O. Iyama: 準遺伝環と Rejection の応用—表現次元と Solomon ゼータ関数—, 第 5 回代数群と量子群の表現論研究集会報告集, (2002), 92–107.

[I4] O. Iyama: On Hall algebras of hereditary orders, to appear in Communications in Algebra.

[I5] O. Iyama: Representation dimension and Solomon zeta function, To appear in Fields Institute Communications.

[K] V. G. Kac: Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory. Invent. Math. 56 (1980), no. 1, 57–92.

[L1] G. Lusztig: Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras, J. Amer. Math. Soc., 4 (1991), 365-421.

[L2] G. Lusztig: Introduction to quantum groups. Progress in Mathematics, 110. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.

[M] I. G. Macdonald: Symmetric functions and Hall polynomials. Second edition. With contributions by A. Zelevinsky. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[Re] I. Reiner: Maximal orders. London Mathematical Society Monographs, No. 5. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1975.

[R1] C. M. Ringel: Hall algebras. Topics in algebra, Part 1 (Warsaw, 1988), 433–447, Banach Center Publ., 26, Part 1, PWN, Warsaw, 1990.

[R2] C. M. Ringel: Hall algebras and quantum groups. Invent. Math. 101 (1990), no. 3, 583–591.

[R3] C. M. Ringel: The composition algebra of a cyclic quiver. Proc. London Math. Soc. (3) 66 (1993), no. 3, 507–537.

[S1] L. Solomon: Zeta functions and integral representation theory. Advances in Math. 26 (1977), no. 3, 306–326.

[S2] L. Solomon: Partially ordered sets with colors. Relations between combinatorics and other parts of mathematics (Proc. Sympos. Pure Math., Ohio State Univ., Columbus, Ohio, 1978), pp. 309–329, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIV, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Sc] O. Schiffmann: The Hall algebra of a cyclic quiver and canonical bases of Fock spaces. Internat. Math. Res. Notices 2000, no. 8, 413–440.

Department of Mathematics, Himeji Institute of Technology, Shosha 2167, Himeji, 671-2201, Japan

iyama@sci.himeji-tech.ac.jp