可算無限生成自由副有限群のある閉正規部分群

大 溪 幸 子[*] (北大 理)[†]

本稿は平成 15 年 3 月 1 日から 3 日に岡山大学で行われた第 8 回代数若手研究会での講演内容に基づくものである．研究会の主旨に沿えるよう，講演中には時間の都合上省略した基本的な定義や注意についても述べる．まず第一節では副有限群の定義と問題の動機付けともなったガロアの逆問題についてふれる．第ニ節では主結果を説明するために必要な副 $\mathcal{C}$-群と埋め込み問題について説明する．最後に第三節で証明の概要を述べる．

1 背景

本稿で終始扱う副有限群の定義を述べる．

定義 1.1. $(G_i, \pi_{ji})_{i,j\in I}$ を有限群の射影系とする．このとき $(G_i)_{i\in I}$ の π_{ij} たちに関する射影的極限

$$G = \varprojlim G_i$$

を **副有限群** (profinite group) という．

ここで射影極限についても述べておく．I を半順序 $\leq$ を持つ集合とし，任意の $i, j \in I$ に対し $i \leq k$, $j \leq k$ となるような $k \in I$ が存在すると仮定する．ここで全ての $i \in I$ に対し集合 S_i が存在し，また $i \leq j$ である全ての組 $(i, j) \in I \times I$ に対し以下の 2 条件を満たす写像 $\pi_{ji} : S_j \longrightarrow S_i$ が存在すると仮定する:

(a) 全ての $i \in I$ に対し π_{ii} は恒等写像,

(b) もし $i \leq j \leq k$ なら，$\pi_{ki} = \pi_{ji} \circ \pi_{kj}$.

このとき $(S_i, \pi_{ji})_{i,j\in I}$ のことを **射影系** という．

全ての $i \leq j$ に対し $\pi_{ji}(s_j) = s_i$ となるような全ての元 $s = (s_i)_{i\in I}$ からなる直積集合 $\prod_{i\in I} S_i$ の部分集合を S とする．S は空であってもよい．$\prod_{i\in I} S_i$ の S への i 番目射影を π_i と書くと，π_i は S から S_i への写像で，$i \leq j$ に対し，$\pi_i = \pi_{ji} \circ \pi_j$ が成り立つ．そこで $(S, \pi_i)_{i\in I}$ を，族 $(S_i)_{i\in I}$ の写像 π_{ij} たちに関する **射影的極限** といい,

$$S = \varprojlim S_i$$

と書く．

[*] *Current e-mail address*: sohtani@math.kyushu-u.ac.jp

[†]所属は講演当時

$G = \varprojlim G_i$ を副有限群とする．各 G_i に離散位相を入れると G は位相群になり，標準射影 $\pi_i : G \longrightarrow G_i$ は連続準同型となる．特に G はコンパクト，ハウスドルフ，完全不連結であり，1 の基本近傍系は G の有限指数正規部分群で与えられる．

例 1.2. 副有限群の代表的な例として p 進有理整数環

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$$

がある．ここで p は素数とする．このとき $\mathbb{Z}_p$ 上 n 次元一般線形群 $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ も

$$GL_n(\mathbb{Z}_p) = \varprojlim GL_n(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z})$$

のように自然に副有限群になる．$SL_n(\mathbb{Z}_p)$ なども同様.

例 1.3 (*cf.* [RZ], p. 71, Theorem 2.11.1). K を体 k 上の無限次ガロア拡大とすると，K は K に含まれる k 上の有限次ガロア拡大 K_i たちの合成体として表される:

$$K = \bigcup_{K/K_i/k} K_i.$$

このとき K の k 上のガロア群 $\mathrm{Gal}\,(K/k)$ は

$$\mathrm{Gal}\,(K/k) = \varprojlim \mathrm{Gal}\,(K_i/k).$$

と表せる．

このように全ての (無限位数の) ガロア群は副有限群であるが，逆に，全ての副有限群は適当な体のガロア拡大のガロア群として実現される．定理として以下に引用する:

定理 1.4 (Waterhouse [W]). G を副有限群とすると，ある体のガロア拡大 K/k が存在して，G は $\mathrm{Gal}\,(K/k)$ と同型.[1]

さて，ガロア群といえば次のガロアの逆問題が有名である:

問題 1.5 (k 上のガロアの逆問題). 基礎体 k を与える．H を任意の有限群としたとき，H をガロア群として持つような k 上の有限次ガロア拡大 K は存在するか ?

群を指定して考える定式化もあるが，ここでは「全ての有限群が k 上のガロア群として実現できるか ?」という場合のみを考える．$\mathbb{Q}$ 上のガロアの逆問題の最初の系統的なアプローチは 1892 年の Hilbert [H] にさかのぼる．有名な既約性定理はこのために証明された．

例 1.6. 例えば $\mathbb{C}(t)$, $\mathbb{R}(t)$, $\bar{\mathbb{Q}}(t)$, $\mathbb{Q}_p(t)$, $\bar{\mathbb{F}}_p(t)$ などの関数体上のガロアの逆問題は肯定的に解かれている．代数体の場合は一般に難しいが，1992 年 Fried-Völklein [FV] により, 標数 0 可算 *Hilbertian*[2] *PAC*-体[3] 上のガロアの逆問題が肯定的に解けることが証明された．具体例

[1]その他, [FJ, p.7, Cor. 1.11] や [RZ, p.73, Thm. 2.11.5] も参照.

[2]体 K 上の r 変数有理関数体 $K(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_r)$, 上の既約分離多項式を $f_i(\mathbf{t}, X)$, $i = 1, \cdots, m$ とする．体 K が *Hilbertian* とは，$\mathbf{a} \in K^r$ が存在して，$f_i(\mathbf{t}, X)$ は K 上定義され既約であることをいう.

[3]体 K が *PAC* (pseudo algebraic closed) であるとは，K 上の絶対既約な代数多様体 $V \neq \emptyset$ に対して, $V(K) \neq \emptyset$ であることをいう．これと同値な条件: K 上の絶対既約な代数多様体 V に対して, $V(K)$ は V 内で Zariski 稠密であること．

には $\mathbb{Q}$ 上最大総実代数体に $\sqrt{-1}$ を添加した体がある．また 1996 年 Pop [P] により正標数の場合が証明された．[4]

$\bar{\mathbb{F}}_p(t)$ と可算 Hilbertian PAC-体の例ではガロアの逆問題の主張よりももっと強いことを証明している．実際には，k の絶対ガロア群, すなわち k の分離閉包 k^{sep} のガロア群 $\mathrm{Gal}\,(k^{\mathrm{sep}}/k)$ が "副有限群として自由である" ことを証明した (詳細は後述)．$\mathbb{Q}$ の最大アーベル拡大 $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ の場合には Shafarevich により以下のように予想されている:

予想 1.7 (Shafarevich). $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ の絶対ガロア群は可算無限生成の自由副有限群である．

Pop [P] により，この予想は $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ が *large*[5] なら成り立つ．$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ は Hilbertian ではあるが，PAC ではない．また一部を除いたほとんどの有限単純群が $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上のガロア群として実現されることなども分っている．$\bar{\mathbb{F}}_p(t)$ の場合は $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ の関数体類似となっている．[6]

では $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ の代わりに，$\mathbb{Q}$ 上の最大可解拡大 $\mathbb{Q}^{\mathrm{sol}}$ の絶対ガロア群の構造はどのようになっているのであろうか．これは副有限群ではあるが，$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ のそれと違って可解商を持たないなど変った構造をしており，自由性を定義することはできない．しかし，Shafarevich 予想を仮定すると，自由ではないが自由に近いものであることが証明できる．正確には次を得る:

定理 1.8. k を体で, その絶対ガロア群が可算無限階数の自由副有限群であるようなものとする. $\mathcal{N}$ を可解商を持たない有限群全てからなる類とすれば, k の最大可解拡大 k^{sol} の絶対ガロア群は ω-$\mathcal{N}$-自由副 $\mathcal{N}$-群である.

詳しくは以下の節以降で説明していく.

2　副 $\mathcal{C}$-群と埋め込み問題

副有限群を考えるのでも特に有限群の類 $\mathcal{C}$ を指定したものを考える. ここで類といったら, 集合の公理を必ずしも満さないものの集まりを意味し, 有限群の類は群同型で閉じているとする.

定義 2.1. $\mathcal{C}$ を有限群の類とする. $\mathcal{C}$ に属する群たちの射影的極限を **副 $\mathcal{C}$-群** (pro-$\mathcal{C}$ group) という.

例 2.2. 代表的な類の例として, 全有限可解群の類, 全 p-群の類などがあり, それぞれに対して上のように定義されるものは, 副可解群 (pro-solvable group), 副 p-群 (pro-p group) と呼ばれ, 重要な副有限群である.

以下, 有限群の類 $\mathcal{C}$ は非自明な群を必ず一つは含むとし, 必要に応じて以下の条件のどれかを満すとする:

---

[4]参照：[MM] Cor. I.1.5, Cor. I.1.7, Cor. I.2.3, Cor. V.2.6, Thm. V.2.7, Thm. IV.3.10, Thm. V.4.10.

[5]体 K が *large* とは，K 上の任意の絶対既約な曲線 V に対して，$V(K) \neq \emptyset$ ならば, $V(K)$ は V 内で Zariski 稠密であることをいう．PAC なら large である．

[6]$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{F}_p(t)$ の類似はよく知られており，$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ と $\bar{\mathbb{F}}_p(t)$ はどちらもそれらの最大円分拡大である．

(i) G は $\mathcal{C}$ に属し, N が G の正規部分群ならば, G/N も $\mathcal{C}$ に属する.

(ii) G は有限群で, G/N_1 と G/N_2 が $\mathcal{C}$ に属するような正規部分群 N_1 と N_2 を持つならば, $G/(N_1 \cap N_2)$ も $\mathcal{C}$ に属する.

(iii) G は $\mathcal{C}$ に属し, N が G の正規部分群ならば, N も $\mathcal{C}$ に属する.

(iii′) G は $\mathcal{C}$ に属し, H が G の部分群ならば, H も $\mathcal{C}$ に属する.

(iv) $1 \to K \to G \to H \to 1$ が有限群の完全列で H と K が $\mathcal{C}$ に属するならば G も $\mathcal{C}$ に属する.

例 2.3. 前の例でも挙げた, 全有限可解群の類と全 p-群の類は上の 5 つの条件全てを満す. しかし全有限アーベル群からなる類は条件 (iv) を満さない.

注意 2.4. ここで Δ を有限単純群の類とし, $\mathcal{C}(\Delta)$ をその組成因子が Δ に属するような有限群全てからなる類とする. このとき $\mathcal{C}(\Delta)$ は (i), (ii), (iii), (iv) を満す. 逆に, $\mathcal{C}$ が (i), (ii), (iii), (iv) を満す類なら, $\mathcal{C}$ は $\mathcal{C}$ に属する有限単純群全てからなる類 Δ に対する $\mathcal{C}(\Delta)$ に等しくなる.

副有限群 Γ の生成系を X とする. Γ の全ての開正規部分群 N に対し $X \setminus N$ が有限集合であるとき, X は **1 に収束する** という. 全ての副有限群は 1 に収束する生成系を持つ. 1 に収束する生成系の濃度をその副有限群の **階数** という.

定義 2.5. Γ を副有限群とし, 図式

$$\begin{tikzcd} & & & \Gamma \arrow[d, "\varphi"] & \\ 1 \arrow[r] & H \arrow[r] & \tilde{G} \arrow[r, two heads, "\kappa"'] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

を Γ に対する **埋め込み問題** (embedding problem) という. ここで下の列は副有限群の完全列とし, φ は全射準同型とする. 特に $\tilde{G}$ が有限群であるときには**有限埋め込み問題**, $\tilde{G}$ が $\mathcal{C}$ に属するときには**$\mathcal{C}$-埋め込み問題**という. 上の図式で Γ から $\tilde{G}$ への全射準同型 (resp. 準同型) $\tilde{\varphi}$ で $\kappa \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ となるものが存在するとき, その埋め込み問題は **解ける** (resp. 弱く解ける) といい, $\tilde{\varphi}$ を **解** (resp. 弱い解) という.

注意 2.6. Γ として体 k の絶対ガロア群をとり, $G = 1$ の場合の有限埋め込み問題を考える. これは Γ から任意の有限群 H への全射準同型があるかという問題であり, これは k 上のガロアの逆問題に他ならない. このように有限埋め込み問題はガロアの逆問題よりずっと強いことを主張している.

定義 2.7. $\mathcal{C}$ を有限群の類, Γ を可算階数の副 $\mathcal{C}$-群とする. Γ に対する全ての $\mathcal{C}$-埋め込み問題が解けるとき, Γ は **ω-$\mathcal{C}$-自由** であるという.

ω-$\mathcal{C}$-自由な副 $\mathcal{C}$-群は存在すれば同型を除いてただ一つに定まる．ではどのような類 $\mathcal{C}$ に対し ω-$\mathcal{C}$-自由副 $\mathcal{C}$-群は存在するのだろうか．

もし $\mathcal{C}$ が先の条件 (i) と (ii) を満すならば ω-$\mathcal{C}$-自由副 $\mathcal{C}$-群は存在して, それはいわゆる可算無限階数の自由副 $\mathcal{C}$-群となる．それは次の定理より分る．

定理 2.8 (Iwasawa [I], Mel'nikov [Me]). $\mathcal{C}$ を条件 (i) と (ii) を満す有限群の類とし, Γ を可算無限階数の副 $\mathcal{C}$-群とする．このとき Γ が自由副 $\mathcal{C}$-群であるためには, Γ の全ての $\mathcal{C}$-埋め込み問題が解けることが必要十分である．

ここで **自由副 $\mathcal{C}$-群** とは 1 に収束する生成系 X を持つ副 $\mathcal{C}$-群 F であって, 以下の普遍的性質を持つもの: X から副 $\mathcal{C}$-群 G への写像 φ に対し, $\varphi(X)$ が G において 1 に収束するなら, 図式

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, dotted, "\tilde{\varphi}"] & G \\ X \arrow[u] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする準同型 $\tilde{\varphi}$ がただ一つ存在する．

では (i) と (ii) を満さないある類に対しても存在するだろうか．そこで Δ を有限単純群の類とし, $\mathcal{C}(\Delta)$ をその組成因子が Δ に属するような有限群全てからなる類とする．$\mathcal{N}$ という類を $\mathcal{C}(\Delta)$-商を持たない[7]有限群全てからなる類として定義する．この $\mathcal{N}$ は (i) は満たすが必ずしも (ii) は満たさない．

この $\mathcal{N}$ という類に対して ω-$\mathcal{N}$-自由副 $\mathcal{N}$-群が存在することが分かる．それは次節で証明する．

例 2.9. Δ を素数位数の巡回群全てからなる類とすると, $\mathcal{C}(\Delta)$ は全有限可解群からなる類となる．これから定義される $\mathcal{N}$ は (ii) を満たさない．

ここで p を奇素数とし,

$$K = \{1, -1\}, \quad S = SL_2(\mathbb{F}_p), \quad P = PSL_2(\mathbb{F}_p)$$

とそれぞれ置く．次に

$$G = S \times_P S = \{(x, y) \in S \times S \mid x \bmod K = y \bmod K\}$$

とおくと, G は正規部分群

$$N_1 = K \times \{1\}, \quad N_2 = \{1\} \times K$$

を持ち, $i = 1, 2$ に対し,

$$G/N_i \simeq S \in \mathcal{N}$$

[7]有限群の類 $\mathcal{C}$ に対し，有限群 G が $\mathcal{C}$-商を持たないとは，任意 G の真の正規部分群 $N \neq 1$ に対し G/N は $\mathcal{C}$ に属さないことをいう．

が成り立つ. しかし一方で $G = G/(N_1 \cap N_2)$ は非自明な正規部分群として

$$G^* = \{(x, x) \mid x \in S\}$$

を持つ.

$$G/G^* \simeq K \in \mathcal{C}(\Delta)$$

より, G は $\mathcal{N}$ に属さない.

以上の反例は, 京大数理研の玉川氏によるものである. 条件 (i) は満たすが (ii) は満たさないような群の例はもう少し一般的に構成できる. 詳しくは [Oh, Remark 1.5] を参照されたし.

3 主結果

F を可算無限階数の自由副有限群, Δ を前節同様有限単純群の類とし, $\mathcal{C}(\Delta)$ もその組成因子が Δ に属するような有限群全てからなる類とする. ここで $R_\Delta(F)$ という群を

$$R_\Delta(F) = \bigcap \{N \mid N \triangleleft F : 開,\ F/N \in \mathcal{C}(\Delta)\}$$

と定義する. このとき $R_\Delta(F)$ は F の閉正規部分群である. さらに次がわかる.

定理 3.1. $R_\Delta(F)$ は ω-$\mathcal{N}$-自由副 $\mathcal{N}$-群である.

ここで F を体 k の絶対ガロア群で可算無限階数の自由副有限群であるようなものだとすると, ω-$\mathcal{N}$-自由副 $\mathcal{N}$-群の普遍性から $R_\Delta(F)$ は k の最大副 $\mathcal{C}(\Delta)$-拡大[8] $k^{\mathcal{C}(\Delta)}$ の絶対ガロア群に等しくなる. よって次を得る:

系 3.2. 体 k の絶対ガロア群が可算無限階数の自由副有限群であるとする. $\mathcal{N}$ を $\mathcal{C}(\Delta)$-商を持たない有限群全てからなる類とすれば, k の最大副 $\mathcal{C}(\Delta)$-拡大 k^Δ の絶対ガロア群は ω-$\mathcal{N}$-自由副 $\mathcal{N}$-群である.

Δ を素数位数の巡回群全てからなる類とすれば, $\mathcal{C}(\Delta)$ は全有限可解群からなる類となり, 第一節の定理 1.8 を得る.

定理の証明. 有限群の類 $\mathcal{N}$ は条件 (i) は満たすので, $R_\Delta(F)$ が副 $\mathcal{N}$-群であることをいうには $R_\Delta(F)$ の各開正規部分群 U に対し $R_\Delta(F)/U$ が $\mathcal{N}$ に属することを言えばよい ([RZ, Theorem 2.1.3] の証明参照). それは $\mathcal{C}(\Delta)$ が条件 (iv) を満たすことが要となる.

次に F は無限生成で $R_\Delta(F)$ は F の閉正規部分群であることから, [FJ, p200. 9] より, $R_\Delta(F)$ の階数は F の階数以下であることが分かる. よって特に可算階数である.

これらのことと ω-$\mathcal{N}$-自由副 $\mathcal{N}$-群の定義から, あとは $R_\Delta(F)$ の $\mathcal{N}$-埋め込み問題が解ければよい. ここで $R_\Delta(F)$ を Γ とおき, その $\mathcal{N}$-埋め込み問題を

$$\begin{tikzcd} & & & \Gamma \arrow[d, "\varphi"] & \\ 1 \arrow[r] & H \arrow[r] & \tilde{G} \arrow[r, two heads, "\kappa"'] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

[8]ガロア群が $\mathcal{C}(\Delta)$ に属するような k の有限次ガロア拡大全ての合成体

とする．今は $\tilde{G} \in \mathcal{N}$ である．ここで N を Γ の開正規部分群で $G \simeq \Gamma/N$ であるようなものとする．このとき [FJ, Lemma 1.5] より，Γ を含む F の開部分群 $\tilde{\Gamma}$ と，$\Gamma \cap U = N$ かつ $\Gamma/N \simeq \tilde{\Gamma}/U$ なる $\tilde{\Gamma}$ の開正規部分群 U が存在する．$\tilde{\Gamma}$ は正規と仮定しても良い．このように φ は $\tilde{\Gamma}$ を経由する．F は可算無限階数の自由副有限群なので，[RZ, Theorem 3.6.2] より，F の開部分群である $\tilde{\Gamma}$ も可算無限階数の自由副有限群である．したがってこのとき $\tilde{\Gamma}$ から $\tilde{G}$ への全射準同型 $\tilde{\psi}$ が存在する．これより次の図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{\Gamma} \arrow[d, dotted, two heads, "\tilde{\psi}"'] \arrow[dr, "\psi"] & \Gamma \arrow[l, hook', "\iota"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\
1 \arrow[r] & H \arrow[r] & \tilde{G} \arrow[r, two heads, "\kappa"'] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

ここで $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} \circ \iota$ とおけば，この $\mathcal{N}$-埋め込み問題の少なくとも弱い解を得る．あとはこの $\tilde{\varphi}$ の全射性を示せばよい．

Γ は $\tilde{\Gamma}$ の正規部分群であるから $\mathrm{Im}\,\tilde{\varphi}$ は $\tilde{G}$ の正規部分群となる．そこで $\tilde{\psi}$ より導かれる全射

$$\tilde{\Gamma}/\Gamma \twoheadrightarrow \tilde{G}/\mathrm{Im}\,\tilde{\varphi}$$

を得る．[RZ, Theorem 3.4.2] より F/Γ は可算無限階数の自由副 $\mathcal{C}(\Delta)$-群なので，類 $\mathcal{C}(\Delta)$ に対する条件 (iii) と [RZ, Theorem 3.6.2] より $\tilde{\Gamma}/\Gamma$ は（自由）副$\mathcal{C}(\Delta)$-群である．しかし一方で，類 $\mathcal{N}$ に対する条件 (i) より $\tilde{G}/\mathrm{Im}\,\tilde{\varphi}$ は $\mathcal{N}$ に属する．したがって $\tilde{G}/\mathrm{Im}\,\tilde{\varphi}$ は 1 でなければならない．以上により $\tilde{\varphi}$ は全射であり，定理は示された． □

参考文献

[FJ] Fried, M.D. and Jarden, M., *Field Arithmetic*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) **11**, Springer, Berlin, 1986

[FV] Fried, M.D. and Völklein, H., *The embedding problem over a Hilbertian PAC field*, Ann. of Math. **135** (1992), 469-481.

[H] Hilbert, D., *Über die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coeffizienten*, J. reine angew. Math. **110** (1892), 104-129.

[I] Iwasawa, K., *On solvable extensions of algebraic number fields*, Ann. of Math. **58** (1953), 548-572.

[MM] Malle, G. and Matzat, B. H., *Inverse Galois Theory*, Springer, Berlin, 2000.

[Me] Mel'nikov, O.V., *Normal divisors of free profinite groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat **42** (1978), 3-25. English transl.: Math. USSR-Izv **12** (1978), 1-20.

[Oh] Ohtani, S., *On certain closed normal subgroups of free profinite groups of countably infinite rank*, to appear in Comm. Algebra.

[P] Pop, F., *Embedding problems over large fields*, Ann. of Math. **144** (1996), 1-34.

[RZ] Ribes, L. and Zalesskii, P., *Profinite Groups*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) **40**, Springer, Berlin, 2000.

[W] Waterhouse, W.C., *Profinite groups are Galois groups*, Proc. AMS **42** (1973), 639-640.