PATH MODEL について

佐垣 大輔 (Daisuke Sagaki)

筑波大学 数学系 助手

Institute of Mathematics, University of Tsukuba

Tsukuba, Ibaraki 305-8571, Japan

e-mail `sagaki@math.tsukuba.ac.jp`

概 要

本論説は, path model が導入された, Littelmann の論文 [2] 〜 [5] のレジュメである．ここでは, path model の理論で最も基本的な Lakshmibai–Seshadri path について解説し, それを用いて得られる character formula, Littlewood–Richardson 型の分解則, P-R-V 予想の証明, および, Levi subalgebra に関する分岐則を紹介する．

0 Introduction.

path model の概念は, Littelmann により, [2], および, [3] において導入された．これは, Kashiwara による integrable highest weight module の結晶基底の, Wely 群を用いた, 実現であり, Kac–Moody algebra (および, その quantized universal enveloping algebra) の表現論における組み合わせ論的な道具の一つである．本論説は, Littelmann の論文 [2] 〜 [5] において得られた主要な結果を (証明付きで) 解説したものである．何かの役に立てば幸いである．

まずは, path model について簡単に紹介しよう．

$\mathfrak{g}$ を symmetrizable Kac–Moody algebra とし, $\mathfrak{h}$ をその Cartan subalgebra とする．integral weight lattice $P \subset \mathfrak{h}^*$ で, $\mathfrak{g}$ の simple root をすべて含むものを取り, fix する．また, $W \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群とする．

さて, $\lambda \in P$ を dominant integral weight とする．shape λ の Lakshmibai–Seshadri path (L-S path) とは, “chain condition” と呼ばれる条件を満たす, $W\lambda$ の元の列 $\underline{\nu} : \nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_s$ と有理数の列 $\underline{a} : 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = 1$ の組 $\pi = (\underline{\nu}\,;\underline{a})$ のことである (see §4)．ここで, $\geq$ は $W\lambda$ 上の “Bruhat order” である (see Definition 4.1 ; 各 $\mu \in W\lambda$ について, $\mu = w\lambda$ となる $w \in W$ の元で長さ最小のものが唯一つ存在する (minimal coset representatives)．それら全体の集合に W 上の Bruhat order を制限したものを $W\lambda$ に引き戻したものが $\geq$ である)．この組 $\pi = (\underline{\nu}\,;\underline{a})$ を以下の $[0,1] := \bigl\{t \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq t \leq 1\bigr\}$ から $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ への区分的で連続な写像 (path) と同一視する:

$$\pi(t) := \sum_{k=1}^{j-1}(a_k - a_{k-1})\nu_i + (t - a_{j-1})\nu_j, \quad \text{if } a_{j-1} \leq t \leq a_j.$$

こうして得られる shape λ の L-S path 全体を $\mathbb{B}(\lambda)$ で表す．このとき, 以下の character formula が成立する (see §5):

Theorem 1. λ を dominant integral weight とする．このとき,

$$\sum_{\pi \in \mathbb{B}(\lambda)} e^{\pi(1)} = \mathrm{ch}\, L(\lambda)$$

が成立する．ここで, $L(\lambda)$ は highest weight λ の integrable highest weight $\mathfrak{g}$-module である．

次に, path model を用いた, Littlewood–Richardson 型の分解則について説明しよう (see §6). λ, μ が dominant integral weight のとき, integrable highest weight module のテンソル積 $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ は完全可約であることが知られている．

Theorem 2. λ, μ を dominant integral weight とする．このとき,

$$L(\lambda) \otimes L(\mu) = \bigoplus_{\substack{\pi \in \mathbb{B}(\mu) \text{ s.t.} \\ \lambda\text{-dominant}}} L(\lambda + \pi(1))$$

が成立する．ここで, shape μ の L-S path $\pi \in \mathbb{B}(\mu)$ が λ-dominant であるとは, $\{\lambda + \pi(t) \mid t \in [0,1]\}$ が dominant Weyl chamber に含まれるときに言う．

また, この分解に関して以下の定理が成立する (see §7)

Theorem 3. λ, μ を dominant integral weight とし, w_1, $w_2 \in W$ とする．もし $\nu := w_1(\lambda) + w_2(\mu)$ が, dominant integral weight であったとすると, $L(\nu)$ は $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ の既約分解に現れる．

次に, I を $\mathfrak{g}$ の simple root の index set とし, $\mathfrak{g}_S$ を I の部分集合 S に対する Levi subalgebra とする．このとき, $\mathfrak{g}$ の integrable highest weight module $L(\lambda)$ を $\mathfrak{g}_S$-module と見なしたものは完全可約であり, これに関して, 以下の分岐則が成立する (see §8):

Theorem 4. λ を ($\mathfrak{g}$ の) dominant integral weight とする．このとき, $L(\lambda)$ は $\mathfrak{g}_S$-module として, 次のように分解する:

$$L(\lambda) = \bigoplus_{\substack{\pi \in \mathbb{B}(\lambda) \text{ s.t.} \\ \mathfrak{g}_S\text{-dominant}}} L_S(\pi(1)).$$

ここで, π が $\mathfrak{g}_S$-dominant であるとは, $\{\pi(t) \mid t \in [0,1]\}$ が $\mathfrak{g}_S$ の root system に関する dominant Weyl chamber に含まれているときに言う．また, $L_S(\lambda)$ は highest weight λ の integrable highest weight $\mathfrak{g}_S$-module を表す．

本論説の構成は以下の通りである: まず, §1 では Kac–Moody algebra に関する記号を準備する．ここでの記号は, 主に [1] のものを採用した．上で述べたような path model に関する定理を証明する際には root operator と呼ばれる写像が必要不可欠となる．§2 では root operator の定義を, §3 では root operator が持つ基本的な性質を紹介する．§4 では Lakshmibai–Seshadri path の定義を述べる．これらの準備の下で, §5 〜 §8 では, 上で述べた諸定理を (証明付きで) 紹介する．

1 Notation.

Kac-Moody algebra に関する記号は以下の通り (cf. [1], [6]).

$A = (a_{ij})_{i,j\in I}$: symmetrizable generalized Cartan matrx (GCM)

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$: Kac-Moody algebra/$\mathbb{Q}$ associated to the GCM A

$\mathfrak{h}$: Cartan subalgebra of $\mathfrak{g}$, $\{x_i,\, y_i \mid i \in I\}$: Chevalley generators of $\mathfrak{g}$

$\{\alpha_i\}_{i\in I}$: the set of simple roots, $\{\alpha_i^\vee\}_{i\in I}$: the set of simple coroots

$Q_+ := \sum \mathbb{Z}_{\geq 0}\,\alpha_i,\ \ Q_- := -Q_+ = \sum \mathbb{Z}_{\leq 0}\,\alpha_i$

Δ_+^{re} : the set of positive real roots

$r_i \in \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$: simple reflection with respect to α_i

$W = \langle r_i \mid i \in I\rangle$: Weyl group of $\mathfrak{g}$, $\ell : W \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$: length function of W

P : integral weight lattice such that $\alpha_i \in P$ for all $i \in I$

$P_+ := \big\{\lambda \in P \mid \langle \lambda, \alpha_i^\vee\rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ for all $i \in I\big\}$

$\rho \in P_+$: Weyl vector, i.e. $\rho \in P_+$ such that $\langle \rho, \alpha_i^\vee\rangle = 1$ for all $i \in I$

$C := \big\{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha_i^\vee\rangle \geq 0$ for all $i \in I\big\}$: dominant Weyl chamber

$X := \bigcup_{w\in W} w(C)$: Tits cone

$L(\lambda) = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} L(\lambda)_\mu$: integrable highest weight $\mathfrak{g}$-module of highest weight $\lambda \in P_+$

2 Root Operators.

$[0,1] := \big\{t \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq t \leq 1\big\}$ とする.

Definition 2.1. $[0,1]$ 上の関数 $h(t)$ が, $t = x$ で極小値をとるとは, $\delta > 0$ が存在して $|t - x| < \delta$ なる任意の $t \in [0,1]$ に対して $h(t) \geq h(x)$ であり, さらに $h(t) > h(x)$ が, 任意の $x < t < x + \delta$ または $x - \delta < t < x$ なる $t \in [0,1]$ で成立するときにいう. また $h(t)$ が $[0,1]$ 上で常に定数のときには, $h(t)$ は $t = 0,\, 1$ で極小値を取ると定める.

Definition 2.2. 区分的に線形で連続な写像 $\pi : [0,1] \to P_{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ が $\pi(0) = 0$ を満たすとき, π は **path** と呼ばれる. また, path $\pi : [0,1] \to P_{\mathbb{Q}}$ が $\pi(1) \in P$ を満たし, さらに任意の $i \in I$ に対して, $h_i^\pi(t) := \langle \pi(t), \alpha_i^\vee\rangle$ の極小値がすべて整数であるとき, π は **integrality property** を満たすという.

path $\pi : [0,1] \to P_{\mathbb{Q}}$ は, 有理数の列 $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = 1$ と, $\{\nu_j\}_{j=1}^s \subset P_{\mathbb{Q}}$ を用いて, 次のように表せる:

$$\pi(t) = \sum_{k=1}^{j-1} (a_k - a_{k-1})\nu_k + (t - a_{j-1})\nu_j, \quad \text{if } a_{j-1} \leq t \leq a_j \tag{2.1}$$

このとき, π を次のよう図示することにしよう:

$$\pi : a_0 \overset{\nu_1}{\text{———}} a_1 \overset{\nu_2}{\text{———}} \cdots \overset{\nu_{s-1}}{\text{———}} a_{s-1} \overset{\nu_s}{\text{———}} a_s \tag{2.2}$$

さて, integrality property を満たす path π に対して,

$$h_i^\pi(t) := \langle \pi(t), \alpha_i^\vee \rangle, \quad m_i^\pi := \min\bigl\{h_i^\pi(t) \mid t \in [0,1]\bigr\} \tag{2.3}$$

と定義する．ここで, raising root operator e_i を定義しよう．まず, $e_i\theta := \theta$ とし, $m_i^\pi > -1$ のときは $e_i\pi := \theta$ と定める (θ は適当な symbol). $m_i^\pi \leq -1$ のとき,

$$\begin{aligned} t_1 &:= \min\bigl\{t \in [0,1] \mid h_i^\pi(t) = m_i^\pi\bigr\} \\ t_0 &:= \max\bigl\{t' \in [0,t_1] \mid h_i^\pi(t) \geq m_i^\pi + 1 \text{ for all } t \in [0,t']\bigr\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

と定める (これらの点の存在は $h_i^\pi(t)$ が区分的に線形で連続であることから分かる)．これを用いて,

$$(e_i\pi)(t) := \begin{cases} \pi(t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_0, \\ \pi(t) - (h_i^\pi(t) - m_i^\pi - 1)\alpha_i \\ \qquad\qquad = r_i(\pi(t) - \pi(t_0)) + \pi(t_0) & \text{if } t_0 \leq t \leq t_1, \\ \pi(t) + \alpha_i & \text{if } t_1 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

と定義する ($h_i^\pi(t_0) = m_i^\pi + 1$ に注意).

Remark 2.3. π が integrality property を満たしているので, $[t_0,t_1]$ で $h_i^\pi(t)$ は狭義単調減少している．実際, $[t_0,t_1]$ で $h_i^\pi(t)$ が増加したり, 局所的に定数になっていたりすると, $h_i^\pi(t)$ が極小値を取る $t_0 < x < t_1$ が存在することになる．ところが, integrality property から $h_i^\pi(x) \in \mathbb{Z}$ であるので, $h_i^\pi(x) = m_i^\pi$ となる (t_0 の取り方から, 十分小さい任意の $\delta > 0$ に対して, $h_i^\pi(t_0+\delta) < h_i^\pi(t_0)$ であることに注意)．これは t_1 の取り方に矛盾している．

次に lowering root operator f_i を定義しよう．まず $f_i\theta := \theta$ とし, $h_i^\pi(1) - m_i^\pi < 1$ のときは $f_i\pi := \theta$ と定める．$h_i^\pi(1) - m_i^\pi \geq 1$ のとき,

$$\begin{aligned} t_0 &:= \max\bigl\{t \in [0,1] \mid h_i^\pi(t) = m_i^\pi\bigr\} \\ t_1 &:= \min\bigl\{t' \in [t_0,1] \mid h_i^\pi(t) \geq m_i^\pi + 1 \text{ for any } t \in [t',1]\bigr\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

と定める．これを用いて,

$$(f_i\pi)(t) := \begin{cases} \pi(t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_0, \\ \pi(t) - (h_i^\pi(t) - m_i^\pi)\alpha_i \\ \qquad\qquad = r_i(\pi(t) - \pi(t_0)) + \pi(t_0) & \text{if } t_0 \leq t \leq t_1, \\ \pi(t) - \alpha_i & \text{if } t_1 \leq t \leq 1, \end{cases} \tag{2.7}$$

と定義する ($h_i^\pi(t_0) = m_i^\pi$ に注意).

Remark 2.4. $h_i^\pi(t)$ は $[t_0,t_1]$ で 狭義単調増加している．

以下では, 次のような path の集合 $\mathbb{B}$ を考えることにする: $\mathbb{B}$ に含まれる path はすべて integrality property を満たし, さらに $\mathbb{B} \cup \{\theta\}$ が root operator 達の作用で不変である. このような path の集合の例としては, §4 で導入する Lakshmibai-Seshadri path の集合などがある.

Example 2.5. $\mathfrak{g} = A_2$ とし, $\lambda = \alpha_1 + \alpha_2$ とする. $\pi_\lambda(t) := t\lambda$ に root operator を次々に作用させていくと, 次のような path が得られる. ここで $\pi' = f_i \pi$ であるとき, $\pi \xrightarrow{\alpha_i} \pi'$ と表すことにする.

$$\begin{tikzcd}
 & t\alpha_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & \pi_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & -t\alpha_1 \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\
t\lambda \arrow[ur, "\alpha_2"] \arrow[dr, "\alpha_1"'] & & & & -t\lambda \\
 & t\alpha_2 \arrow[r, "\alpha_2"'] & \pi_2 \arrow[r, "\alpha_2"'] & -t\alpha_2 \arrow[ur, "\alpha_1"'] &
\end{tikzcd}$$

但し, π_i $(i = 1, 2)$ は次のような path である:

$$\pi_i(t) = \begin{cases} -t\alpha_i & \text{if } 0 \le t \le 1/2, \\ (t-1)\alpha_i & \text{if } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

3 Simple Properties of the Root Operators.

Lemma 3.1. (1) $\pi \in \mathbb{B}$ とする. $e_i \pi \neq \theta$ (resp. $f_i \pi \neq \theta$) であるならば,

(a) $(e_i\pi)(1) = \pi(1) + \alpha_i$ (resp. $(f_i\pi)(1) = \pi(1) - \alpha_i$),

(b) $f_i e_i \pi = \pi$ (resp. $e_i f_i \pi = \pi$),

(c) $m_i^{e_i\pi} = m_i^\pi + 1$ (resp. $m_i^{f_i\pi} = m_i^\pi - 1$).

(2) $\pi \in \mathbb{B}$ に対して, $e_i^n \pi \neq \theta$ (resp. $f_i^n \pi \neq \theta$) となるための必要十分条件は $n \le -m_i^\pi$ (resp. $n \le h_i^\pi(1) - m_i^\pi$) であることである.

Proof. (1) (a) root operator の定義 (2.5) および (2.7) より明らか.

(b) $f_i e_i \pi = \pi$ を示そう. 記号を簡略化するため, $\eta := e_i \pi$ とおく. まず (2.5) より, 次が得られる:

$$\eta(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{if } 0 \le t \le t_0, \\ r_i(\pi(t) - \pi(t_0)) + \pi(t_0) & \text{if } t_0 \le t \le t_1, \\ \pi(t) + \alpha_i & \text{if } t_1 \le t \le 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$h_i^\eta(t) = \begin{cases} h_i^\pi(t) & \text{if } 0 \le t \le t_0, \\ -h_i^\pi(t) + 2(m_i^\pi + 1) & \text{if } t_0 \le t \le t_1, \\ h_i^\pi(t) + 2 & \text{if } t_1 \le t \le 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Claim 1. $h_i^\eta(t)$ の最小値は $m_i^\pi + 1$ で, この値を取る最大の $t \in [0,1]$ は t_0 である.

まず $0 \le t \le t_0$ では, t_0 の取り方と (3.2) から, 明らかに $h_i^\eta(t) \ge m_i^\pi + 1$ が成立する. Remark 2.3 より, $[t_0, t_1]$ で $h_i^\pi(t)$ は狭義単調減少しているので, $h_i^\eta(t)$ は狭義単調増加していることになる. よって, この区間で $h_i^\eta(t)$ は t_0 でのみ最小値 $h_i^\eta(t_0) = -h_i^\pi(t_0) + 2(m_i^\pi + 1) = m_i^\pi + 1$ を取る. $t_1 \le t \le 1$ では $h_i^\eta(t) = h_i^\pi(t) + 2 \ge m_i^\pi + 2$ である. したがって, Claim 1 が示せた.

Claim 1 から, $h_i^\eta(1) - m_i^\eta = (h_i^\pi(1) + 2) - (m_i^\pi + 1) = h_i^\pi(1) - m_i^\pi + 1 \ge 1$ となる.

Claim 2. $t_1 = \min\bigl\{t' \in [t_0, 1] \mid h_i^\eta(t) \ge m_i^\pi + 2 \text{ for all } t \in [t', 1]\bigr\}$

Claim 1 での計算により, t_1 が最小であることのみ示せばよい. $[t_0, t_1]$ 上で, $h_i^\eta(t)$ が狭義単調増加していることに注意すると, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, $h_i^\eta(t_1 - \varepsilon) < h_i^\eta(t_1) = m_i^\pi + 2$ が成立する. これによって主張が示せた.

Claim 1 および Claim 2 より, t_0, t_1 が η に対する f_i の "折り返し点" (see (2.6)) であることが分かった. したがって, lowering root operator f_i の定義 (2.7) から

$$(f_i e_i \pi)(t) = (f_i \eta)(t) = \begin{cases} \eta(t) & \text{if } 0 \le t \le t_0, \\ r_i(\eta(t) - \eta(t_0)) + \eta(t_0) & \text{if } t_0 \le t \le t_1, \\ \eta(t) - \alpha_i & \text{if } t_1 \le t \le 1, \end{cases}$$

となる. これに (3.1) を代入すれば主張が得られる. $e_i f_i \pi = \pi$ も同様.

(c) 上の 証明中の Claim 1 で示されている.

(2) $e_i^n \pi \ne \theta$ とし, 記号を簡単にするために $\eta := e_i^{n-1}\pi$ とおく. このとき, 定義から $-m_i^\eta \ge 1$ である. 一方, (1c) より, $m_i^\eta = m^\pi + (n-1)$ である. これらを合わせると, $-m_i^\pi \ge n$ となる. 逆に $-m_i^\pi \ge n$ とすると, 任意の $0 \le k \le n$ に対して, $e_i^k \pi \ne \theta$ を k に関する induction で示そう. $k = 0$ のときは明らかである. $0 \le k \le n-1$ とすると,

$$-m_i^{e_i^k \pi} - 1 = -m_i^\pi - k - 1 \ge -m_i^\pi - (n-1) - 1 = -m_i^\pi - n \ge 0$$

より, $m_i^{e_i^k \pi} \le -1$ である. よって, $e_i^{k+1}\pi \ne \theta$ である. したがって, 上の主張が言え, 特に $k = n$ として, $e_i^n \pi \ne \theta$ となる. □

Lemma 3.2. $\pi \in \mathbb{B}$ に対して,

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\pi) &:= \max\bigl\{n \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \mid e_i^n \pi \ne \theta\bigr\} = -m_i^\pi, \\ \varphi_i(\pi) &:= \max\bigl\{n \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \mid f_i^n \pi \ne \theta\bigr\} = h_i^\pi(1) - m_i^\pi. \end{aligned} \tag{3.3}$$

が成立する．特に $\langle \pi(1), \alpha_i^\vee \rangle = \varphi_i(\pi) - \varepsilon_i(\pi)$ である．また, 任意の $i \in I$ に対して, $e_i\pi = \theta$ となる必要十分条件は, 任意の $i \in I$ に対して $m_i^\pi = 0$ が成立することである．

Proof. integrality property より $h_i^\pi(1)$, $m_i^\pi \in \mathbb{Z}$ が成立することに注意すれば, (3.3) の各式の 2 番目の等号は Lemma 3.1(2) より容易に分かる．$\langle \pi(1), \alpha_i^\vee \rangle = \varphi_i(\pi) - \varepsilon_i(\pi)$ は (3.3) より明らか. $e_i\pi = \theta \Leftrightarrow m_i^\pi = 0$ も明らか. □

Remark 3.3. Lemma 3.1 (1) および, Lemma 3.2 より, $\mathbb{B}$ には $\mathrm{wt} : \mathbb{B} \to P$ ($\mathrm{wt}(\pi) := \pi(1)$), e_i, $f_i : \mathbb{B} \cup \{\theta\} \to \mathbb{B} \cup \{\theta\}$, および ε_i, $\varphi_i : \mathbb{B} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ により, (normal) crystal の構造が入る.

Lemma 3.4. (1) $\pi \in \mathbb{B}$ が, ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $e_i^n\pi \neq \theta$ を満たしたとする．$t_{j,0}, t_{j,1}$ を $e_i^j\pi$ に対する e_i の "折り返し点" (see (2.4)) とする．このとき, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して, $t_{j,1} \leq t_{j-1,0}$ が成立し,

$$(e_i^n\pi)(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_{n-1,0}, \\ \pi(t) - (h_i^\pi(t) - m_i^\pi - n)\alpha_i & \text{if } t_{j,0} \leq t \leq t_{j,1} \ (j = 0, 1, \ldots, n-1), \\ \pi(t) - (n-j)\alpha_i & \text{if } t_{j,1} \leq t \leq t_{j-1,0} \ (j = 0, 1, \ldots, n-1), \end{cases} \tag{3.4}$$

となる．ここで, $t_{-1,0} := 1$ とした.

(2) $\pi \in \mathbb{B}$ が, ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $f_i^n\pi \neq \theta$ を満たしたとする．$(t_{j,0}, t_{j,1})$ を $f_i^j\pi$ に対する f_i の "折り返し点" (see (2.6)) とする．このとき, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して, $t_{j-1,1} \leq t_{j,0}$ が成立し,

$$(f_i^n\pi)(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_{0,0}, \\ \pi(t) - (h_i^\pi(t) - m_i^\pi)\alpha_i & \text{if } t_{j,0} \leq t \leq t_{j,1} \ (j = 0, 1, \ldots, n-1), \\ \pi(t) - (j+1)\alpha_i & \text{if } t_{j,1} \leq t \leq t_{j+1,0} \ (j = 0, 1, \ldots, n-1), \end{cases} \tag{3.5}$$

となる．ここで, $t_{n,0} := 1$ とした.

Proof. (1) 簡単のため, $\eta_j := e_i^j\pi$ とおく．Lemma 3.1(1b) の Claim 1 で示したように, $h_i^{\eta_j}(t)$ の最小値は $m_i^{\eta_{j-1}} + 1$ であり, $h_i^{\eta_j}(t_{j-1,0}) = m_i^{\eta_{j-1}} + 1$ である．したがって, "折り返し点" の定義 (2.4) から, $t_{j,1} \leq t_{j-1,0}$ となる．次に

$$\eta_j(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_{j-1,0}, \\ \pi(t) - (h_i^\pi(t) - m_i^\pi - j)\alpha_i & \text{if } t_{j-1,0} \leq t \leq t_{j-1,1}, \\ \pi(t) + \alpha_i & \text{if } t_{j-1,1} \leq t \leq t_{j-2,0}, \\ \pi(t) - (h_i^\pi(t) - m_i^\pi - j)\alpha_i & \text{if } t_{j-2,0} \leq t \leq t_{j-2,1}, \\ \pi(t) + 2\alpha_i & \text{if } t_{j-2,1} \leq t \leq t_{j-3,0}, \\ \vdots & \\ \pi(t) - (h_i^\pi(t) - m_i^\pi - j)\alpha_i & \text{if } t_{0,0} \leq t \leq t_{0,1}, \\ \pi(t) + j\alpha_i & \text{if } t_{0,1} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

を j に関する inducition で示す. $j=1$ のときは明らかに成立する. $j\geq 2$ とする. このとき,

$$\eta_j(t)=(e_i^j\pi)(t)=\begin{cases}\eta_{j-1}(t) & \text{if } 0\leq t\leq t_{j-1,0},\\ \eta_{j-1}(t)-(h_i^{\eta_{j-1}}(t)-m_i^{\eta_{j-1}}-1)\alpha_i & \text{if } t_{j-1,0}\leq t\leq t_{j-1,1},\\ \eta_{j-1}(t)+\alpha_i & \text{if } t_{j-1,1}\leq t\leq 1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\pi(t) & \text{if } 0\leq t\leq t_{j-1,0},\\ \pi(t)-(h_i^{\pi}(t)-m_i^{\pi}-j)\alpha_i & \text{if } t_{j-1,0}\leq t\leq t_{j-1,1},\\ \pi(t)+\alpha_i & \text{if } t_{j-1,1}\leq t\leq t_{j-2,0},\\ \pi(t)-(h_i^{\pi}(t)-m_i^{\pi}-j)\alpha_i & \text{if } t_{j-2,0}\leq t\leq t_{j-2,1},\\ \pi(t)+2\alpha_i & \text{if } t_{j-2,1}\leq t\leq t_{j-3,0},\\ \qquad\vdots & \\ \pi(t)-(h_i^{\pi}(t)-m_i^{\pi}-j)\alpha_i & \text{if } t_{0,0}\leq t\leq t_{0,1},\\ \pi(t)+j\alpha_i & \text{if } t_{0,1}\leq t\leq 1,\end{cases}$$

となり, 主張が言える (3 番目の等号で induction の仮定を使った). 特に $j=n$ とすれば (3.4) が得られる. (2) も同様に示せる. □

4 Lakshmibai-Seshadri Paths.

以下では, 断らない限り $\lambda\in P_+$ とする.

Definition 4.1. $\mu,\nu\in W\lambda$ に対して, 次のような $W\lambda$ の元の列 $\mu=\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_t=\nu$ と positive real root の列 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ が存在するとき, $\mu\geq\nu$ と定める: $j=1,2,\ldots,t$ に対して, $\mu_j=r_{\beta_j}(\mu_{j-1})$ かつ $\langle\mu_{j-1},\beta_j^\vee\rangle\in\mathbb{Z}_{<0}$ が成立する. また, 上のような $W\lambda$ の元の列を, (μ,ν) に対する, 長さ t の (Bruhat) chain と呼ぶことにする. さらに $\mathrm{dist}(\mu,\nu)$ で, (μ,ν) に対する chain のうち, 最長のもの (longest chain) の長さを表すことにする.

Remark 4.2. (1) (μ,ν) に対する chain は, 一般には一意的ではない. しかし, chain が与えられたとき, それに対応する positive real root の列は一意的に定まる ($\lambda\in\mathfrak{h}^*$ および $\beta,\beta'\in\Delta_+^{\mathrm{re}}$ が $\lambda\neq r_\beta(\lambda)=r_{\beta'}(\lambda)$ を満たすならば $\beta=\beta'$ であることに注意しよう).

(2) $\mu\geq\nu$ とする. このとき, $\nu=\mu-\sum_{j=1}^t\langle\mu_{j-1},\beta_j^\vee\rangle\beta$ より, $\nu-\mu\in Q_+$ となる.

Lemma 4.3. $\mu,\nu\in W\lambda$, $\mu\geq\nu$ とする. さらに $\mathrm{dist}(\mu,\nu)=1$ とし, $\beta\in\Delta_+^{\mathrm{re}}$ を $r_\beta(\mu)=\nu$ かつ $\langle\mu,\beta^\vee\rangle<0$ を満たすものとする. このとき, simple root α_i が, $\langle\mu,\alpha_i^\vee\rangle<0$ かつ $\langle\nu,\alpha_i^\vee\rangle\geq 0$ (resp. $\langle\mu,\alpha_i^\vee\rangle\leq 0$ かつ $\langle\nu,\alpha_i^\vee\rangle>0$) を満たせば, $\beta=\alpha_i$ である.

Proof. $\langle\mu,\alpha_i^\vee\rangle<0$ かつ $\langle\nu,\alpha_i^\vee\rangle\geq 0$ である場合を考える (もう一方の場合も同様である). $\beta\neq\alpha_i$

とする．このとき, $\nu_0 := \mu,\ \nu_1 := r_i(\mu),\ \nu_2 := r_i(\nu),\ \nu_3 := \nu$ とすると, 明らかに

$$\begin{cases} r_i(\nu_0) = \nu_1, \\ \langle \nu_0, \alpha_i^\vee \rangle < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} r_i(\nu_2) = \nu_3, \\ \langle \nu_2, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0, \end{cases}$$

が成立する (2 番目の下の式で等号が成立する場合は $\nu_2 = \nu_3$ であることに注意する)．さらに, $r_{r_i(\beta)}(r_i(\nu_1)) = \nu_2,\ \langle \nu_1, (r_i(\beta))^\vee \rangle < 0$ が成立する．ここで, $\beta \neq \alpha_i$ より, $r_i(\beta) \in \Delta_+^{\mathrm{re}}$ である．したがって, $\mathrm{dist}(\mu, \nu) \geq 2$ となる．これは $\mathrm{dist}(\mu, \nu) = 1$ に矛盾. □

Lemma 4.4. $\mu, \nu \in W\lambda$ が, $\mu \geq \nu$ を満たすとする.

(1) $\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ かつ $\langle \nu, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ のとき, $r_i(\mu) \geq \nu$ であり, $\mathrm{dist}(r_i(\mu), \nu) = \mathrm{dist}(\mu, \nu) - 1$.

(2) $\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ かつ $\langle \nu, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ のとき, $\mu \geq r_i(\nu)$ であり, $\mathrm{dist}(\mu, r_i(\nu)) = \mathrm{dist}(\mu, \nu) - 1$.

(3) $\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ かつ $\langle \nu, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ (resp. $\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ かつ $\langle \nu, \alpha_i^\vee \rangle < 0$) のとき, $r_i(\mu) \geq r_i(\nu)$ であり, $\mathrm{dist}(r_i(\mu), r_i(\nu)) = \mathrm{dist}(\mu, \nu)$ が成立する.

Proof. (1) $\mu = \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_t = \nu$ を (μ, ν) に対する longest chain とし (i.e., $\mathrm{dist}(\mu, \nu) = t$), $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ を対応する positive real root の列とする．$\langle \mu_k, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ かつ $\langle \mu_{k+1}, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ となる最小の k を取る (仮定より存在する)．このとき, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ は α_i とは異なる．実際, もしそうでないとすると, $\beta_j = \alpha_i$ となる最小の j に対して,

$$\langle \mu_{j-1}, \alpha_i^\vee \rangle = \langle \mu_{j-1}, \beta_j^\vee \rangle < 0, \qquad \langle \mu_j, \alpha_i^\vee \rangle = \langle r_{\beta_j}(\mu_{j-1}), \alpha_i^\vee \rangle = \langle r_i(\mu_{j-1}), \alpha_i^\vee \rangle > 0$$

となり, k の最小性に矛盾する．したがって, $r_i(\beta_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ は positive real root である．さらに $j = 1, 2, \ldots, k$ に対して,

$$r_{r_i(\beta_j)}(r_i(\mu_{j-1})) = r_i(\mu_j), \quad \langle r_i(\mu_{j-1}), (r_i(\beta_j))^\vee \rangle < 0$$

が成立する．また $\mathrm{dist}(\mu_k, \mu_{k+1}) = 1$ であるから, Lemma 4.3 より, $\beta_{k+1} = \alpha_i$ となる．したがって, $r_i(\mu_k) = \mu_{k+1}$ となる．これらのことより

$$\begin{cases} r_i(\nu) = r_i(\mu_0),\ r_i(\mu_1),\ \ldots,\ r_i(\mu_{k-1}),\ r_i(\mu_k) = \mu_{k+1},\ \mu_{k+2},\ \ldots,\ \mu_t = \mu \\ r_i(\beta_1),\ \ldots,\ r_i(\beta_k),\ \beta_{k+2},\ \ldots,\ \beta_t \end{cases}$$

が $(r_i(\mu), \nu)$ に対する chain であることが分かった．したがって, $r_i(\mu) \geq \nu$ となる．また, $\mathrm{dist}(r_i(\mu), \nu) \geq t - 1$ であることもわかる.

上の列が $(r_i(\mu), \nu)$ に対する longest chain であること, すなわち, $\mathrm{dist}(r_i(\mu), \nu) = t-1$ を示そう. $\mathrm{dist}(r_i(\mu), \nu) =: t' > t - 1$ と仮定する．$\mu'_0, \mu'_1, \ldots, \mu'_{t'}$ を $(r_i(\mu), \nu)$ に対する longest chain とし, $\beta'_1, \ldots, \beta'_{t'}$ を対応する positive real root の列とする．このとき, これらの列の先頭に $\mu_{-1} := \mu$, $\beta'_0 := \alpha_i$ を追加したものは, (μ, ν) に対する chain となる．したがって, $\mathrm{dist}(\mu, \nu) \geq t' + 1 > t$ となるが, これは矛盾．よって, $\mathrm{dist}(r_i(\mu), \nu) = t - 1$ となる.

(2) (1) と同様.

(3) $\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ かつ $\langle \nu, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ の場合のみ示す (もう一方も同様). まず, 定義から $r_i(\mu) > \mu$ である. したがって, $r_i(\mu) > \nu$ となる. このとき, $\langle r_i(\mu), \alpha_i^\vee \rangle > 0$ かつ $\langle \nu, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ であるから, (2) を使うと, $r_i(\mu) \geq r_i(\nu)$ および $\mathrm{dist}(r_i(\mu), r_i(\nu)) = \mathrm{dist}(r_i(\mu), \nu) - 1$ が得られる. また, 明らかに $\mathrm{dist}(r_i(\mu), \nu) = \mathrm{dist}(\mu, \nu) + 1$ であるから, $\mathrm{dist}(r_i(\mu), r_i(\nu)) = \mathrm{dist}(\mu, \nu)$ となる. □

Definition 4.5. $\underline{\nu}$ を $\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_s$ なる $W\lambda$ の元の列, $\underline{a}$ を $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = 1$ なる有理数の列とする. このとき, これらの組 $\pi = (\underline{\nu}; \underline{a})$ を shape (もしくは class) λ の rational path と呼ぶ. このとき, π を次の path と同一視する:

$$\pi(t) := \sum_{k=1}^{j-1} (a_k - a_{k-1})\nu_i + (t - a_{j-1})\nu_j, \quad \text{if } a_{j-1} \leq t \leq a_j \tag{4.1}$$

§2 の (2.2) で導入した記法を使うと次のようになる:

$$\pi : a_0 \xrightarrow{\ \nu_1\ } a_1 \xrightarrow{\ \nu_2\ } \cdots \xrightarrow{\ \nu_{s-1}\ } a_{s-1} \xrightarrow{\ \nu_s\ } a_s$$

rational path π が integrality property を満たすように, 次の a-chain という概念を導入する.

Definition 4.6. $0 < a < 1$ を有理数とし, $\mu, \nu \in W\lambda$, $\mu \geq \nu$ とする. (μ, ν) に対する longest chain $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_t$ が, $t = 0$ で $\mu = \mu_0 = \nu$ であるか, 任意の $j = 1, 2, \ldots, t$ に対して, $a\langle \mu_{j-1}, \beta_j^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ を満たすとき, (μ, ν) に対する a-chain と呼ぶ. ここで, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ は上の longest chain に対応する positive real root の列である.

Remark 4.7. Bruhat order $\geq$ の定義から, 任意の $j = 1, 2, \ldots, t$ に対して $\langle \mu_{j-1}, \beta_j^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{<0}$ が成立する. したがって, $a(\mu - \nu) = \sum_{j=1}^{t} a(\mu_{j-1} - \mu_j) = \sum_{k=1}^{t} a\langle \mu_{j-1}, \beta_j^\vee \rangle \beta_j \in Q_-$ となる.

Lemma 4.8. $\mu = \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_t = \nu$ を (μ, ν) に対する a-chain とする.

(1) $\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ であり, ある k に対して $\langle \mu_k, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ が成立するとき, $(r_i(\mu), \nu)$ に対する a-chain が存在する.

(2) $\langle \nu, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ であり, ある k に対して $\langle \mu_k, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ が成立するとき, $(\mu, r_i(\nu))$ に対する a-chain が存在する.

Proof. (1) $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ を対応する positive real root の列とする. $\langle \mu_{k+1}, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ を充たす最小の k をとる. このとき, $j = 1, 2, \ldots, k$ に対して, $\beta_j \neq \alpha_i$ であることが分かる (cf. Lemma 4.4(1) の証明). また, Lemma 4.4(3) より, $j = 1, 2, \ldots, k$ に対して, $\mathrm{dist}(r_i(\mu_{j-1}), r_i(\mu_j)) = \mathrm{dist}(\mu_{j-1}, \mu_j) = 1$ である. さらに, $\mathrm{dist}(\mu_k, \mu_{k+1}) = 1$ かつ $\langle \mu_k, \alpha_i^\vee \rangle < 0$, $\langle \mu_{k+1}, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ であるから, Lemma 4.3 より, $r_i(\mu_k) = \mu_{k+1}$. これらのことから

$$\begin{cases} r_i(\mu) = r_i(\mu_0), \ldots, r_i(\mu_k) = \mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \ldots, \mu_t = \nu, \\ r_i(\beta_1), \ldots, r_i(\beta_k), \beta_{k+2}, \ldots, \beta_t, \end{cases}$$

が, $(r_i(\mu), \nu)$ の a-chain となることが分かる.

(2) (1) と同様. □

Definition 4.9. shape $\lambda \in P_+$ の rational path $\pi = (\underline{\nu}\,;\underline{a}) = (\nu_1, \ldots, \nu_s\,; a_0, \ldots, a_s)$ が, shape λ の Lakshmibai-Seshadri path (以下, L-S path) であるとは, 各 $k = 1, 2, \ldots, s-1$ に対して, (ν_k, ν_{k+1}) に対する a_k-chain が存在するときに言う.

次の Lemma が重要である:

Lemma 4.10. $\pi = (\nu_1, \ldots, \nu_s\,; a_0, \ldots, a_s)$ を shape λ の L-S path とする.

(1) $\pi(1) \in P$.

(2) 任意の $1 \le k \le l \le s$ に対して, $\pi' = (\nu_k, \ldots, \nu_l\,; 0, a_k, \ldots, a_{l-1}, 1)$ も L-S path となる.

(3) $a_{j-1} \le x \le a_j$ とする. このとき, $\langle \pi(x), \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ であるための必要十分条件は $x\langle \nu_{j-1}, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ であることである.

(4) 任意の $i \in I$ に対して, $h_i^\pi(t)$ の極小値はすべて整数である.

Proof. (1) $a_k(\nu_k - \nu_{k+1}) \in Q_-$ であること (see Remark 4.7), および $\nu_s \in W\lambda \subset P$ であることに注意すると,

$$\pi(1) = \sum_{k=1}^{s} (a_k - a_{k-1})\nu_k = \nu_s + \sum_{k=1}^{s-1} a_k(\nu_k - \nu_{k+1}) \tag{4.2}$$

から (1) が得られる.

(2) 定義から明らかである.

(3) (1) と同様にして $\pi(x) = x\nu_j + \sum_{k=1}^{j-1} a_k(\nu_k - \nu_{k+1})$ であるから, $\langle \pi(x), \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ であることと $x\langle \nu_j, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ であることが同値であることが分かる.

(4) $h_i^\pi(t)$ が定数のとき, すなわち $h_i^\pi(t) = 0$ のときは示すことは何もない. 以下では $h_i^\pi(t)$ は定数でないとする. $h_i^\pi(t)$ および π の定義を考えると, t_0 で $h_i^\pi(t)$ が 極小値を取れば, ある j が存在して $t_0 = a_j$ となっている. (2) より, $\pi' := (\nu_1, \ldots, \nu_j, \nu_{j+1}\,; 0, a_1, \ldots, a_j, 1)$ とすると, これは L-S path となり, 明らかに $h_i^\pi(a_j) = h_i^{\pi'}(a_j)$ が成立する. したがって, 始めから $j = s-1$ としてもよい. このとき, $h_i^\pi(a_{s-1}) = \langle \pi(1), \alpha_i^\vee \rangle - (1 - a_{s-1})\langle \nu_s, \alpha_i^\vee \rangle$ より, $(1 - a_{s-1})\langle \nu_s, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ を示せばよい. $\langle \nu_s, \alpha_i^\vee \rangle = 0$ であるならば, O.K. そうでないとすると, $t = a_{s-1}$ で極小値を取るのだから, $\langle \nu_s, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ かつ $\langle \nu_{s-1}, \alpha_i^\vee \rangle \le 0$ となっている. したがって, Lemma 4.8 より, $(\nu_{s-1}, r_i(\nu_s))$ に対する a_s-chain が存在するので, $\pi'' := (\nu_1, \ldots, \nu_{s-1}, r_i(\nu_s)\,; a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}, a_s)$ も L-S path になる. chain condition より $\nu_s - \pi(1)$ および $r_i(\nu_s) - \pi''(1)$ は positive real root の和, 特に root lattice の元となる (cf. (4.2)). したがって,

$$\pi(1) - \pi''(1) = (r_i(\nu_s) - \pi''(1)) + (\nu_s - \pi(1)) + \langle \nu_s, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$$

より, $\pi(1) - \pi''(1)$ も root lattice の元となる. 一方,

$$\pi(1) - \pi''(1) = (1 - a_{s-1})\nu_s - (1 - a_{s-1})r_i(\nu_s) = (1 - a_{s-1})\langle \nu_s, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$$

で, これが root lattice の元になるには, $(1-a_{s-1})\langle \nu_s, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ でなくてはいけない. これで主張が示せた. □

Remark 4.11. 上の (1) と (4) から L-S path は integrality property を満たすことが分かった!! (非常に重要)

Lemma 4.12. $\pi = (\nu_1, \ldots, \nu_s\,;\, a_0, \ldots, a_s)$ を shape λ の L-S path とする. さらに, $\nu_k = \mu_0 > \mu_1 > \cdots > \mu_t = \nu_{k+1}$ を (ν_k, ν_{k+1}) に対する a_k-chain とする. さらに simple root α_i を $\langle \nu_k, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ (resp. $\langle \nu_{k+1}, \alpha_i^\vee \rangle > 0$) を満たすものとする. このとき, $\langle \mu_j, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ (resp. $\langle \mu_j, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$) となる j が存在したとすると, $h_i^\pi(a_k) \in \mathbb{Z}$ となる.

Proof. Lemma 4.10 (4) と同じ理由で $k = s-1$ としてよい. また, Lemma の主張を示すには $(1-a_{s-1})\langle \nu_s, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ を示せばよいことも同様にわかる. さて $\langle \nu_{s-1}, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ であり, $\langle \mu_j, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ となる j が存在したとする. このとき, Lemma 4.8 より, $\pi' := (\nu_1, \ldots, \nu_{s-1}, r_i(\nu_s)\,;\, a_0, \ldots, a_{s-1}, a_s)$ も L-S path となる. このとき, chain condition より $\nu_s - \pi(1)$ および $r_i(\nu_s) - \pi'(1)$ は root lattice の元となる. 後は, Lemma 4.10(4) の証明と同様である. □

Remark 4.13. 後で使うのは Lemma 4.12 の対偶である. すなわち:

“$\pi = (\nu_1, \ldots, \nu_s\,;\, a_0, \ldots, a_s)$ を L-S path とする. さらに, $\nu_k = \mu_0 > \mu_1 > \cdots > \mu_t = \nu_{k+1}$ を (ν_k, ν_{k+1}) に対する a_k-chain とする. さらに simple root α_i を, $\langle \nu_k, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ (resp. $\langle \nu_{k+1}, \alpha_i^\vee \rangle > 0$) を充たすものとする. このとき, $h_i^\pi(a_k) \notin \mathbb{Z}$ であるならば, 任意の $j = 0, 1, \ldots, t$ に対して, $\langle \mu_j, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ (resp. $\langle \mu_j, \alpha_i^\vee \rangle > 0$) が成立する. 特に, $(r_i(\nu_k), r_i(\nu_{k+1}))$ に対する a_k-chain が存在する.”

最後の主張は次のように示すことが出来る: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ を上の a_k-chain に対応する positive real root の列とする. このとき, 任意の $j = 1, 2, \ldots, t$ に対して, $\beta_j \neq \alpha_i$ であることがわかる (cf. Lemma 4.4(1) の証明). したがって,

$$\begin{cases} r_i(\nu_k) = r_i(\mu_0),\, r_i(\mu_1),\, \ldots,\, r_i(\mu_t) = r_i(\nu_{k+1}) \\ r_i(\beta_1),\, \ldots,\, r_i(\beta_t) \end{cases}$$

が, $(r_i(\nu_k), r_i(\nu_{k+1}))$ に対する a_k-chain となる.

さて, L-S path に対する root operator の作用を調べてみよう. $\pi = (\nu_1, \ldots, \nu_s\,;\, a_0, \ldots, a_s)$ を spahe λ の L-S path とし, $h_i^\pi(1) - m_i^\pi \geq 1$ とする. t_0, t_1 を π に対する f_i の “折り返し点” (see (2.6)) とする. このとき, $h_i^\pi(t)$ は $t = t_0$ で極小値を取っているので, 定義から, ある k が存在して $t_0 = a_k$ となっていることに注意する. $a_{l-1} < t_1 \leq a_l$ としよう. root operator の定義から,

$$(f_i\pi)(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{if } a_{j-1} \leq t \leq a_j \ (1 \leq j \leq k), \\ r_i(\pi(t) - \pi(a_k)) + \pi(a_k) & \text{if } a_{j-1} \leq t \leq a_j \ (k+1 \leq j \leq l-1),\ a_{l-1} \leq t \leq t_1, \\ \pi(t) - \alpha_i & \text{if } t_1 \leq t \leq a_l,\ a_{j-1} \leq t \leq a_j \ (l+1 \leq j \leq s). \end{cases}$$

２番目の式を計算すると次のようになる:

$$\sum_{m=1}^{k}(a_m - a_{m-1})\nu_m + \sum_{m=k+1}^{j-1}(a_m - a_{m-1})r_i(\nu_m) + (t - a_{j-1})r_i(\nu_j)$$

３番目の式は

$$\pi(t) - \alpha_i = \pi(t) - \pi(t_1) + r_i(\pi(t_1) - \pi(a_k)) + \pi(a_k)$$

を使うと, 次のように変形できる:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{k}(a_m - a_{m-1})\nu_m + \sum_{m=k+1}^{l-1}(a_m - a_{m-1})r_i(\nu_m) \\ + (t_1 - a_{l-1})r_i(\nu_l) + (a_l - t_1)\nu_l + \sum_{m=l+1}^{j-1}(a_m - a_{m-1})\nu_m + (t - a_{j-1})\nu_j\end{aligned}$$

したがって, 大雑把に言えば $f_i\pi$ は次のような path となる:

$$\begin{aligned}a_0 \xrightarrow{\nu_1} a_1 \xrightarrow{\nu_2} \dots \xrightarrow{\nu_{k-1}} a_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} a_k \xrightarrow{r_i(\nu_{k+1})} a_{k+1} \xrightarrow{r_i(\nu_{k+2})} \dots \\ \xrightarrow{r_i(\nu_{l-1})} a_{l-1} \xrightarrow{r_i(\nu_l)} t_1 \xrightarrow{\nu_l} a_l \xrightarrow{\nu_{l+1}} a_{l+1} \xrightarrow{\nu_{l+2}} \dots \xrightarrow{\nu_s} a_s \qquad (4.3)\end{aligned}$$

これをさらに細かく調べるために幾つかの注意をする. まず $[t_0, t_1] = [a_k, t_1]$ で $h_i^\pi(t)$ は狭義単調増加しているから, $j = k+1, \dots, l$ に対して, $\langle \nu_j, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ が成立する. さらに $t_1 = a_l$ のとき, $r_i(\nu_l) \neq \nu_{l+1}$ である. 実際, もしそうでないとすると, $\langle \nu_{l+1}, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ となる. ところが, このとき十分小さい $\delta > 0$ に対して, $h(t_1 + \delta) = h(a_l + \delta) < h(a_l) = h(t_1)$ となり, これは t_1 の取り方に反する. さらに, $t_1 = a_l$ のとき $\langle \nu_{l+1}, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ であることも上の証明からわかる. これらのことをふまえて $f_i\pi$ を詳しく調べてみよう.

Case 1　$r_i(\nu_{k+1}) = \nu_k$ かつ $t_1 = a_l$ のとき.

このとき (4.3) は次のようになる:

$$\begin{aligned}a_0 \xrightarrow{\nu_1} a_1 \xrightarrow{\nu_2} \dots \xrightarrow{\nu_{k-1}} a_{k-1} \xrightarrow{\nu_k = r_i(\nu_{k+1})} a_{k+1} \xrightarrow{r_i(\nu_{k+2})} \dots \\ \xrightarrow{r_i(\nu_{l-1})} a_{l-1} \xrightarrow{r_i(\nu_l)} a_l \xrightarrow{\nu_{l+1}} a_{l+1} \xrightarrow{\nu_{l+2}} \dots \xrightarrow{\nu_s} a_s\end{aligned}$$

まず $j = k+1, \dots, l$ に対して, $\langle \nu_j, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ であること, および $r_i(\nu_l) > \nu_l$ であることに注意すると

$$\nu_1 > \dots > \nu_k = r_i(\nu_{k+1}) > \dots > r_i(\nu_l) > \nu_{l+1} > \dots > \nu_s$$

が成立している. また, $h_i^\pi(a_k) = m_i^\pi$ および $h_i^\pi(a_l) = m_i^\pi + 1$ であり, $[a_k, a_l]$ で $h_i^\pi(t)$ は狭義単調増加しているから, $j = k+1, \dots, l-1$ に対して, $h(a_j) \notin \mathbb{Z}$ であるからことが分かる. したがって, Remark 4.13 より, $(r_i(\nu_j), r_i(\nu_{j+1}))$ に対する a_j-chain が存在する. さらに $h_i^\pi(a_l) \in \mathbb{Z}$ であるこ

とから, Lemma 4.10(3) より, $a_l\langle\nu_l,\alpha_i^\vee\rangle\in\mathbb{Z}$ である. また, $r_i(\nu_l)>\nu_l$ で, これに Lemma 4.4(1) を使うと, $\mathrm{dist}(r_i(\nu_l),\nu_l)=\mathrm{dist}(\nu_l,\nu_l)+1=1$. したがって, $(r_i(\nu_l),\nu_l)$ に a_l-chain が存在する. よって, $(r_i(\nu_l),\nu_{l+1})$ に対する a_l-chain が存在することが分かった. これらをあわせると, $f_i\pi$ は次のような shape λ の L-S path となる:

$$\begin{aligned}f_i\pi=(\nu_1,\dots,\nu_{i-1},r_i(\nu_{i+1}),\dots,r_i(\nu_l),\nu_{l+1},\dots,\nu_s\,;\\ a_0,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_{l-1},a_l,\dots,a_s)\end{aligned}$$

Case 2　$r_i(\nu_{k+1})=\nu_k$ かつ $t_1\neq a_l$ のとき.

このとき (4.3) は次のようになる:

$$\begin{aligned}a_0\xrightarrow{\nu_1}a_1\xrightarrow{\nu_2}\dots\xrightarrow{\nu_{k-1}}a_{k-1}\xrightarrow{\nu_k=r_i(\nu_{k+1})}a_{k+1}\xrightarrow{r_i(\nu_{k+2})}\dots\\ \xrightarrow{r_i(\nu_{l-1})}a_{l-1}\xrightarrow{r_i(\nu_l)}t_1\xrightarrow{\nu_l}a_l\xrightarrow{\nu_{l+1}}a_{l+1}\xrightarrow{\nu_{l+2}}\dots\xrightarrow{\nu_s}a_s\end{aligned}$$

$h(t_1)\in\mathbb{Z}$ であるから, Lemma 4.10(3) より, $(r_i(\nu_l),\nu_l)$ に t_1-chain があることがわかる. 後は Case 1 の場合と同様にして $f_i\pi$ が次の L-S path であることがわかる:

$$\begin{aligned}f_i\pi=(\nu_1,\dots,\nu_{k-1},r_i(\nu_{k+1}),\dots,r_i(\nu_l),\nu_l,\nu_{l+1},\dots,\nu_s\,;\\ a_0,\dots,a_{k-1},a_{k+1},\dots,a_{l-1},t_1,a_l,\dots,a_s)\end{aligned}$$

Case 3　$r_i(\nu_{k+1})\neq\nu_k$ かつ $t_1=a_l$ のとき.

このとき (4.3) は次のようになる:

$$\begin{aligned}a_0\xrightarrow{\nu_1}a_1\xrightarrow{\nu_2}\dots\xrightarrow{\nu_{k-1}}a_{k-1}\xrightarrow{\nu_k}a_k\xrightarrow{r_i(\nu_{k+1})}a_{k+1}\xrightarrow{r_i(\nu_{k+2})}\dots\\ \xrightarrow{r_i(\nu_{l-1})}a_{l-1}\xrightarrow{r_i(\nu_l)}a_l\xrightarrow{\nu_{l+1}}a_{l+1}\xrightarrow{\nu_{l+2}}\dots\xrightarrow{\nu_s}a_s\end{aligned}$$

$\langle\nu_k,\alpha_i^\vee\rangle\leq 0$ かつ $\langle\nu_{k+1},\alpha_i^\vee\rangle>0$ であるから, Lemma 4.8(2) より, $(\nu_k,r_i(\nu_{k+1}))$ に対する a_k-chain が存在する. 後は Case 1 の場合と同様にすれば, $f_i\pi$ は次の L-S path になる:

$$\begin{aligned}f_i\pi=(\nu_1,\dots,\nu_{k-1},\nu_k,r_i(\nu_{k+1}),\dots,r_i(\nu_l),\nu_{l+1},\dots,\nu_s\,;\\ a_0,\dots,a_{k-1},a_k,a_{k+1},\dots,a_{l-1},a_l,\dots,a_s)\end{aligned}$$

Case 4　$r_i(\nu_{k+1})\neq\nu_k$ かつ $t_1\neq a_l$ のとき.

このとき (4.3) は次のようになる:

$$\begin{aligned}a_0\xrightarrow{\nu_1}a_1\xrightarrow{\nu_2}\dots\xrightarrow{\nu_{k-1}}a_{k-1}\xrightarrow{\nu_k}a_k\xrightarrow{r_i(\nu_{k+1})}a_{k+1}\xrightarrow{r_i(\nu_{k+2})}\dots\\ \xrightarrow{r_i(\nu_{l-1})}a_{l-1}\xrightarrow{r_i(\nu_l)}t_1\xrightarrow{\nu_l}a_l\xrightarrow{\nu_{l+1}}a_{l+1}\xrightarrow{\nu_{l+2}}\dots\xrightarrow{\nu_s}a_s\end{aligned}$$

Case 2, Case 3 と同様にして, $f_i\pi$ は次のような L-S path となる.

$$f_i\pi = (\nu_1, \ldots, \nu_{k-1}, \nu_k, r_i(\nu_{k+1}), \ldots, r_i(\nu_l), \nu_l, \nu_{l+1}, \ldots, \nu_s\,;$$
$$a_0, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{l-1}, t_1, a_l, \ldots, a_s)$$

これで f_i の shape λ の L-S path π への作用の仕方がわかった.

e_i の π への作用も同様に計算ができる. t_0, t_1 を π に対する e_i の "折り返し点" (see (2.4)) とする. このとき, ある k が存在して $t_1 = a_k$ となっている. また $a_{l-1} \le t_0 < a_l$ とする. raising root operator の定義から,

$$(e_i\pi)(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{if } a_{j-1} \le t \le a_j \ (1 \le j \le l-1),\ a_{l-1} \le t \le t_0, \\ \pi(t) - (h_i^\pi(t) - m_i^\pi - 1)\alpha_i & \text{if } t_0 \le t \le a_l,\ a_{j-1} \le t \le a_j \ (l+1 \le j \le k), \\ \pi(t) + \alpha_i & \text{if } a_{j-1} \le t \le a_j \ (k+1 \le j \le s). \end{cases}$$

これを計算して, 図を用いて表すと次のようになる:

$$a_0 \xrightarrow{\nu_1} a_1 \xrightarrow{\nu_2} \cdots \xrightarrow{\nu_{l-1}} a_{l-1} \xrightarrow{\nu_l} t_0 \xrightarrow{r_i(\nu_l)} a_l \xrightarrow{r_i(\nu_{l+1})} \cdots$$
$$\xrightarrow{r_i(\nu_{k-1})} a_{k-1} \xrightarrow{r_i(\nu_k)} a_k \xrightarrow{\nu_{k+1}} a_{k+1} \xrightarrow{\nu_{k+2}} \cdots \xrightarrow{\nu_s} a_s \tag{4.4}$$

f_i のときと同様に次のことが成立する: $\langle \nu_j, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ $(j = l, l+1, \ldots, k)$, $\langle \nu_{k+1}, \alpha_i^\vee \rangle \ge 0$. さらに $t_0 = a_{l-1}$ であれば, $r_i(\nu_l) \ne \nu_{l-1}$ が成立する. これをふまえて, (4.4) を細かく調べると次のようになる (f_i の場合と同様なので, 図と結果のみ記す).

Case 1 $r_i(\nu_k) = \nu_{k+1}$ かつ $t_0 = a_{l-1}$ のとき.

$$a_0 \xrightarrow{\nu_1} a_1 \xrightarrow{\nu_2} \cdots \xrightarrow{\nu_{l-1}} a_{l-1} \xrightarrow{r_i(\nu_l)} a_l \xrightarrow{r_i(\nu_{l+1})} \cdots$$
$$\xrightarrow{r_i(\nu_{k-1})} a_{k-1} \xrightarrow{r_i(\nu_k)=\nu_{k+1}} a_{k+1} \xrightarrow{\nu_{k+2}} \cdots \xrightarrow{\nu_s} a_s$$

$$e_i\pi = (\nu_1, \ldots, \nu_{l-1}, r_i(\nu_l), \ldots, r_i(\nu_{k-1}), \nu_{k+1}, \ldots, \nu_s\,;$$
$$a_0, \ldots, a_{l-1}, a_l, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_s)$$

Case 2 $r_i(\nu_k) = \nu_{k+1}$ かつ $t_0 \ne a_{l-1}$ のとき.

$$a_0 \xrightarrow{\nu_1} a_1 \xrightarrow{\nu_2} \cdots \xrightarrow{\nu_{l-1}} a_{l-1} \xrightarrow{\nu_l} t_0 \xrightarrow{r_i(\nu_l)} a_l \xrightarrow{r_i(\nu_{l+1})} \cdots$$
$$\xrightarrow{r_i(\nu_{k-1})} a_{k-1} \xrightarrow{r_i(\nu_k)=\nu_{k+1}} a_{k+1} \xrightarrow{\nu_{k+2}} \cdots \xrightarrow{\nu_s} a_s$$

$$e_i\pi = (\nu_1, \ldots, \nu_l, r_i(\nu_l), r_i(\nu_{l+1}), \ldots, r_i(\nu_{k-1}), \nu_{k+1}, \ldots, \nu_s\,;$$
$$a_0, \ldots, a_{l-1}, t_0, a_l, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_s)$$

Case 3 $r_i(\nu_k) \neq \nu_{k+1}$ かつ $t_0 = a_{l-1}$ のとき.

$$
\begin{aligned}
&a_0 \overset{\nu_1}{\rule{2em}{0.4pt}} a_1 \overset{\nu_2}{\rule{2em}{0.4pt}} \dots \overset{\nu_{l-1}}{\rule{2em}{0.4pt}} a_{l-1} \overset{r_i(\nu_l)}{\rule{2em}{0.4pt}} a_l \overset{r_i(\nu_{l+1})}{\rule{2em}{0.4pt}} \dots \\
&\qquad\qquad \overset{r_i(\nu_{k-1})}{\rule{2em}{0.4pt}} a_{k-1} \overset{r_i(\nu_k)}{\rule{2em}{0.4pt}} a_k \overset{\nu_{k+1}}{\rule{2em}{0.4pt}} a_{k+1} \overset{\nu_{k+2}}{\rule{2em}{0.4pt}} \dots \overset{\nu_s}{\rule{2em}{0.4pt}} a_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_i\pi = (\nu_1, \dots, \nu_{l-1}, r_i(\nu_l), \dots, r_i(\nu_{k-1}), r_i(\nu_k), \nu_{k+1}, \dots, \nu_s\,; \\
a_0, \dots, a_{l-1}, a_l, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_s)
\end{aligned}
$$

Case 4 $r_i(\nu_k) \neq \nu_{k+1}$ かつ $t_0 \neq a_{l-1}$ のとき.

$$
\begin{aligned}
&a_0 \overset{\nu_1}{\rule{2em}{0.4pt}} a_1 \overset{\nu_2}{\rule{2em}{0.4pt}} \dots \overset{\nu_{l-1}}{\rule{2em}{0.4pt}} a_{l-1} \overset{\nu_l}{\rule{2em}{0.4pt}} t_0 \overset{r_i(\nu_l)}{\rule{2em}{0.4pt}} a_l \overset{r_i(\nu_{l+1})}{\rule{2em}{0.4pt}} \dots \\
&\qquad\qquad \overset{r_i(\nu_{k-1})}{\rule{2em}{0.4pt}} a_{k-1} \overset{r_i(\nu_k)}{\rule{2em}{0.4pt}} a_k \overset{\nu_{k+1}}{\rule{2em}{0.4pt}} a_{k+1} \overset{\nu_{k+2}}{\rule{2em}{0.4pt}} \dots \overset{\nu_s}{\rule{2em}{0.4pt}} a_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_i\pi = (\nu_1, \dots, \nu_l, r_i(\nu_l), r_i(\nu_{l+1}), \dots, r_i(\nu_{k-1}), r_i(\nu_k), \nu_{k+1}, \dots, \nu_s\,; \\
a_0, \dots, a_{l-1}, t_0, a_l, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_s)
\end{aligned}
$$

以上より, 次の Theorem がわかる.

Theorem 4.14. (1) $\mathbb{B}(\lambda)$ を shape λ の L-S path 全体の集合とする. このとき $\mathbb{B}(\lambda) \cup \{\theta\}$ は root operator で不変である.

(2) $\pi_\lambda(t) := (\lambda; 0, 1) = t\lambda$ は, 任意の $i \in I$ に対して, $e_i\pi = 0$ となる唯一つの shape λ の L-S path である. さらに, $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対して, ある $i_1, i_2, \dots, i_k \in I$ が存在して, $\pi = f_{i_1} \dots f_{i_k}\pi_\lambda$ となる.

Proof. (1) 上で行った計算より O.K.

(2) $\pi = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s\,; a_0, a_1, \dots, a_s)$ を shape λ の L-S path とする. ここで, $\nu_1 = \lambda$ であるならば $\pi = \pi_\lambda$ であることに注意する ($\because$ λ は $W\lambda$ の, relative Bruhat order に関する, 最小元である). 任意の $i \in I$ に対して, $e_i\pi = \theta$ であったとする. このとき, $\langle \nu_1, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ が任意の $i \in I$ に対して成立しなくてはいけない. 実際, ある $i \in I$ に対して, $\langle \nu_1, \alpha_i \rangle < 0$ であるとすると, L-S path は integrality property を満たすので, $m_i^\pi \leq -1$ となる. よって, $e_i\pi \neq 0$ となる. したがって, ν_1 は dominant integral weight である. $W\lambda$ に含まれる dominant integral weight は λ のみであるから, $\nu_1 = \lambda$ となり, 上で注意したことから $\pi = \pi_\lambda$ となる.

次に後半の主張を示そう.

$$
\pi(1) = \nu_s + \sum_{k=1}^{s-1} a_k(\nu_k - \nu_{k+1})
$$

であり, $a_k(\nu_k - \nu_{k+1}) \in Q_-$ (see Remark 4.7) および $\nu_s \in W\lambda \subset \lambda - Q_+$ であるから, $\pi(1) \in \lambda - Q_+$ である. このことに注意して,

$$
\mathrm{depth}(\pi) := \sum_{i \in I} k_i \quad \text{if } \pi(1) = \lambda - \sum_{i \in I} k_i\alpha_i \text{ with } k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}
$$

と定める．主張を depth(π) に関する induction で示そう．depth$(\pi) = 0$ のとき, $a_k(\nu_k - \nu_{k+1}) \in Q_-$ および $\nu_s \in \lambda - Q_+$ であることに注意すれば, $\pi = \pi_\lambda$ となる．よって, この場合は O.K. $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ を depth$(\pi) \geq 1$ を満たすものとする．このとき, $i \in I$ で $e_i\pi \neq \theta$ となるものが存在する．実際, もし 任意の $i \in I$ に対して, $e_i\pi = \theta$ となったとすると, 前半の主張より $\pi = \pi_\lambda$ となり, depth$(\pi) \geq 1$ に矛盾する．$(e_i\pi)(1) = \pi(1) + \alpha_i$ であるから, induction の仮定より, ある $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$ が存在して, $e_i\pi = f_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{i_k}\pi_\lambda$ となる．ここで, Lemma 3.1(1b) を使えば, $\pi = f_if_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{i_k}\pi_\lambda$ となり, 主張が示せた． □

5 Character Formula.

このセクションでは次の character formula を示す.

Theorem 5.1. $\lambda \in P_+$ とする．このとき,

$$\sum_{\pi \in \mathbb{B}(\lambda)} e^{\pi(1)} \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\rho)} = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda+\rho)} \tag{5.1}$$

が成立する．すなわち,

$$\sum_{\pi \in \mathbb{B}(\lambda)} e^{\pi(1)} = \operatorname{ch} L(\lambda) \tag{5.2}$$

である.

まず次の補題を証明しよう.

Lemma 5.2. $\lambda \in P_+$ とする．$\Psi \subset \lambda - Q_+$ が W の作用で不変であるならば, $\Psi \subset X$ である.

Proof. $\mu \in \Psi$ とする．このとき, 仮定から $W\mu \subset \Psi \subset \lambda - Q_+$ である．ν を $W\mu$ の元のうちで, λ からの depth が最小のものとする．ここで depth とは, $\nu = \lambda - \sum_{i \in I} k_i\alpha_i$ のとき, $\sum_{i \in I} k_i$ で定める．もし $\langle \nu, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ となる $i \in I$ が存在したとすると, $r_i(\nu)$ の depth が ν の depth よりも小さくなってしまい, ν の depth の最小性に矛盾．したがって, 任意の $i \in I$ に対して $\langle \nu, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$, すなわち, $\nu \in C$ となる．よって, $\mu \in W\nu \subset X = \bigcup_{w \in W} w(C)$ である． □

$i \in I$ に対して, $s_i : \mathbb{B}(\lambda) \to \mathbb{B}(\lambda)$ を次で定める.

$$s_i(\pi) := \begin{cases} f_i^n\pi & \text{if } n := \langle \pi(1), \alpha_i^\vee \rangle \geq 0, \\ e_i^n\pi & \text{if } n := \langle \pi(1), \alpha_i^\vee \rangle < 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

と定める.

Remark 5.3. (1) $s_i\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ for all $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$.

(2) $s_i(s_i(\pi)) = \pi$.

(3) $(s_i\pi)(1) = r_i(\pi(1))$.

Proof of Theorem 5.1. $\Psi := \{\pi(1) + w(\rho) \mid \pi \in \mathbb{B}(\lambda),\, w \in W\}$ とおく．このとき, Ψ は Tits cone X に含まれる．実際, Remark 5.3 より, $\{\pi(1) \mid \pi \in \mathbb{B}(\lambda)\}$ は Weyl 群の作用で不変である．よって, Ψ も Weyl 群の作用で不変であることがわかる．また, Theorem 4.14(2) と $W\rho \subset \rho - Q_+$ であることから, $\Phi \subset (\lambda + \rho) - Q_+$ となる．したがって, Lemma 5.2 より, $\Psi \subset X$ である．

さて, $\Phi := \mathbb{B}(\lambda) \times W$ とし,

$$\text{LHS of (5.1)} = \sum_{(\pi,w)\in\Phi} (-1)^{\ell(w)} e^{\pi(1)+w(\rho)} =: \sum_{\mu\in\Psi} c(\mu) e^{\mu}$$

とおき, 各 $c(\mu)$ を計算してみよう．$\mu \in \Psi$ に対して,

$$\Phi_\mu := \{(\pi, w) \mid \pi \in \mathbb{B}(\lambda),\, w \in W \text{ with } \pi(1) + w(\rho) = \mu\}$$

とする．このとき, $c(\mu) = \sum_{(\pi,w)\in\Phi_\mu} (-1)^{\ell(w)}$ である．さらに, $R_i : \Phi_\mu \to \Phi_{r_i(\mu)}$ を $R_i((\pi, w)) = (s_i(\pi), r_i w)$ で定めると, R_i は全単射写像である．したがって,

$$c(r_i(\mu)) = \sum_{(\pi,w)\in\Phi_{r_i(\mu)}} (-1)^{\ell(w)} = \sum_{(\pi,w)\in\Phi_\mu} (-1)^{\ell(r_i w)} = -c(\mu)$$

よって, 任意の $w \in W$ に対して, $c(w(\mu)) = (-1)^{\ell(w)} c(\mu)$ が成立する．したがって, Ψ の各 W-orbit の適当な代表元に対して, $c(\mu)$ を決定すればよい．ここで, 証明の最初に注意したことより, $\Psi \subset X$ であるから, この代表元として, dominant integral なものを取ることが出来る．以下では $c(\mu)$, $\mu \in P_+ \cap \Psi$ を決定しよう．

まず $\Phi_{\lambda+\rho} = \{(\pi_\lambda, 1)\}$ であることが容易にわかる．したがって, $c(\lambda + \rho) = 1$ となる．次に $\mu \neq \lambda + \rho$ である $\mu \in P_+ \cap \Psi$ に対して, $c(\mu)$ を計算してみよう．まず $(\pi, w) \in \Phi_\mu$ に対して, ある $t \in [0, 1]$ と $i \in I$ が存在して, $\langle \pi(t) + \rho, \alpha_i^\vee \rangle = 0$ となる．実際, もしそうでないとすると, $\mu = \pi(1) + w(\rho)$ が dominant integral weight であることから, 任意の $i \in I$ および $t \in [0, 1]$ に対して, $\langle \pi(t) + w(\rho), \alpha_i^\vee \rangle > 0$ が成立しなくてはいけない．ここで $t = 0$ とすると $w = 1$ が得られる．したがって, 任意の $t \in [0, 1]$ に対して, $\langle \pi(t) + \rho, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ が成立していることになる．このとき, Lemma 3.2 より, 任意の $i \in I$ に対して, $e_i(\pi) = \theta$ となる．したがって, Theorem 4.14 より, $\pi = \pi_\lambda$ となり, $\mu = \pi(1) + w(\rho) = \lambda + \rho$ となる．これは矛盾.

$(\pi, w) \in \Phi_\mu$ に対して,

$$x = x_{(\pi,w)} := \max\{t \in [0, 1] \mid \langle \pi(t) + w(\rho), \alpha_i^\vee \rangle = 0 \text{ for some } i \in I\}$$

と定める．次に Tits cone X の部分集合 $X_{i_1,\dots,i_s}$ を

$$X_{i_1,\dots,i_s} := \left\{ \lambda \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle \lambda, \alpha_{i_j}^\vee \rangle = 0 \text{ for } j = 1, 2, \dots, s, \\ \langle \lambda, \alpha_k^\vee \rangle \neq 0 \text{ for } k \neq i_1, \dots, i_s \end{array} \right\}$$

で定める．さらに

$$\Phi_\mu(X_{i_1,\dots,i_s}) := \{(\pi, w) \in \Phi_\mu \mid \pi(x_{\pi,w}) + w(\rho) \in X_{i_1,\dots,i_s}\}$$

とおく. このとき, 明らかに Φ_μ は $\Phi_\mu(X_{i_1,\dots,i_s})$ 達の disjoint union になっている. すなわち,

$$c(\mu) = \sum_{(\pi,w)\in\Phi_\mu} (-1)^{\ell(w)} = \sum_{\substack{i_1,\,\dots,\,i_s\in I \\ s\ge 1}} \sum_{(\pi,w)\in\Phi_\mu(X_{i_1,\dots,i_s})} (-1)^{\ell(w)}$$

が成立する. したがって, $c(\mu)$ を決定するためには

$$\sum_{(\pi,w)\in\Phi_\mu(X_{i_1,\dots,i_s})} (-1)^{\ell(w)}$$

を計算すればよい.

$w \in W$ に対して, $n_k(w) := \langle w(\rho), \alpha_k^\vee\rangle$ と定める. このとき, $n_k(w) \neq 0$ であることに注意する. $(\pi, w) \in \Phi_\mu(X_{i_1,\dots,i_s})$ とし, $k \in \{i_1, \dots, i_s\}$ を適当に fix する. まず $n := n_k(w) > 0$ の場合を考えよう. このとき, $h_k^\pi(x_{(\pi,w)}) + n = 0$ であるから, $h_k^\pi(t)$ の最小値は $-n$ 以下である. したがって, Lemma 3.1(2) より, $e_k^n\pi \neq \theta$ である.

Claim 1. $(e_k^n\pi, r_k w) \in \Phi_\mu(X_{i_1,\dots,i_s})$.

まず, $(e_k^{n_k(w)}\pi)(1) + r_k w(\rho) = \pi(1) + w(\rho) = \mu$ である. よって, $(e_k^n\pi, r_k w) \in \Phi_\mu$ である. 次に $\eta_j := e_k^j\pi$ とし, $j = 0, 1, \dots, n-1$ に対して, $(t_{j,0}, t_{j,1})$ を η_j に対する e_k の "折り返し点" (see (2.4)) とする. このとき, $t_{1,1} \le x = x_{(\pi,w)}$ である. 実際, x の定義から $t > x$ である任意の $t \in [0,1]$ に対して $h_k^\pi(t) + n > 0$ である. したがって, 任意の $t > x$ に対して $h_k^\pi(t) > -n \ge m_k^\pi$ となるので, $t_{1,1} \le x$ である. よって, Lemma 3.4(1) より, $t \ge x$ で,

$$(e_k^n(\pi))(t) + r_k w(\rho) = (\pi(t) + n\alpha_k) + (w(\rho) - n\alpha_k) = \pi(t) + w(\rho)$$

となる. したがって, 定義から $(e_k^n\pi, r_k w) \in \Phi_\mu(X_{i_1,\dots,i_s})$ となる (Claim 1 の証明終).

次に $n = n_k(w) < 0$ とする. このとき, $0 \le \langle \mu, \alpha_k^\vee\rangle = h_k^\pi(1) + n \le (h_k^\pi(1) - m_k^\pi) + n$ より, $f_k^{-n}\pi \neq \theta$ である.

Claim 2. $(f_k^{-n}\pi, r_k w) \in \Phi_\mu(X_{i_1,\dots,i_s})$.

まず, $(f_k^{-n}\pi)(1) + r_k w(\rho) = \pi(1) + w(\rho) = \mu$ であるから, $(f_k^{-n}\pi, r_k w) \in \Phi_\mu$ である. 次に $\eta_j := f_k^j\pi$ とし, $j = 0, 1, \dots, -n-1$ に対して, $(t_{j,0}, t_{j,1})$ を η_j に対する f_k の "折り返し点" (see (2.6)) とする. $t_{-n-1,1} \le x = x_{(\pi,w)}$ を示そう. まず, 定義から

$$t_{-n-1,0} = \max\bigl\{t \in [0,1] \mid h_k^{\eta_{-n-1}}(t) = m_k^{\eta_{-n-1}}\bigr\}$$

である. Lemma 3.4(2) より, $t_{-n-2,1} \le t_{-n-1,0}$ であり, $[t_{-n-2,1}, 1]$ 上で $\eta_{-n-1}(t) = \pi(t) - (-n-1)\alpha_i$ である (ここで $n = -1$ のときは $t_{-1,0} := 0$ とする). また, Lemma 3.1(1c) より $m_k^{\eta_{-n-1}} = m_k^\pi - (-n-1)$ であるから,

$$t_{-n-1,0} = \max\bigl\{t \in [0,1] \mid h_k^\pi(t) = m_k^\pi - n - 1\bigr\}$$

となる．したがって，任意の $t > x$ に対して，

$$h_k^\pi(t) > -n \geq m_k^\pi - n > m_k^\pi - n - 1 \tag{5.4}$$

となるから，$t_{-n-1,0} < x$ である．次に上と同様にして，

$$t_{-n-1,1} = \min\big\{t \in [t_{-n-1,0}, 1] \mid h_k^\pi(t) = m_k^\pi - n\big\}$$

となる．一方で (5.4) 式 より，任意の $t > x$ に対して，$h_k^\pi(t) \geq m^\pi - n$ が成立する．よって，$t_{-n-1,1} \leq x$ が得られた．Lemma 3.4(2) より，$t \geq x$ で，

$$(f_k^{-n}(\pi))(t) + r_k w(\rho) = (\pi(t) + n\alpha_k) + (w(\rho) - n\alpha_k) = \pi(t) + w(\rho)$$

となる．したがって，$(f_k^{-n}\pi, r_k w) \in \Phi_\mu(X_{i_1,\ldots,i_s})$ となる (Claim 2 の証明終).

Claim 1 と Claim 2 をふまえて，$\mathrm{inv} : \Phi_\mu(X_{i_1,\ldots,i_s}) \to \Phi_\mu(X_{i_1,\ldots,i_s})$ を

$$\mathrm{inv}((\pi, w)) := \begin{cases} (e_i^{n_k(w)}\pi, r_k w) & \text{if } n_w(k) > 0, \\ (f_i^{-n_k(w)}\pi, r_k w) & \text{if } n_w(k) < 0, \end{cases} \tag{5.5}$$

で定義する．このとき，明らかに inv は $\Phi_\mu(X_{i_1,\ldots,i_s})$ 上の involution である．また，$\mathrm{inv}((\pi, w)) = (\pi', r_k w)$ のとき，$(-1)^{\ell(w)} + (-1)^{\ell(r_k w)} = (-1)^{\ell(w)} e^\mu + (-1)^{\ell(w)\pm 1} e^\mu = 0$ が成立する．したがって，

$$\sum_{(\pi,w)\in\Phi_\mu(X_{i_1,\ldots,i_s})} (-1)^{\ell(w)} = 0$$

であることがわかった．よって，$\mu \neq \lambda + \rho$ ならば，$c(\mu) = 0$ となる．これらをあわせると，

$$\text{LHS of (5.1)} = \sum_{w\in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda+\rho)}$$

となり，character formula が得られる． □

6 Littlewood-Richardson Type Rule.

Definition 6.1. λ, $\mu \in P_+$ とする．shape μ の L-S path π が λ-dominant であるとは，$\big\{\lambda + \pi(t) \mid t \in [0, 1]\big\} \subset C$ であるときに言う．

このセクションでは次の定理を示す:

Theorem 6.2. λ, $\mu \in P_+$ とする．このとき，

$$L(\lambda) \otimes L(\mu) = \bigoplus_{\substack{\pi\in\mathbb{B}(\mu) \text{ s.t.} \\ \lambda\text{-dominant}}} L(\lambda + \pi(1)). \tag{6.1}$$

Proof. $n_{\lambda,\mu}^{\nu}$ で $L(\lambda)\otimes L(\mu)$ における $L(\nu)$ の重複度を表すことにする．すなわち，$L(\lambda)\otimes L(\mu) = \bigoplus_{\nu\in P_+} n_{\lambda,\mu}^{\nu} L(\nu)$ である．character を考えると，$\operatorname{ch} L(\lambda)\cdot \operatorname{ch} L(\mu) = \sum_{\nu\in P_+} n_{\lambda,\mu}^{\nu} \operatorname{ch} L(\nu)$ となる．この式に Weyl-Kac character formula を使うと，

$$\left(\frac{\displaystyle\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w(\lambda+\rho)}}{\displaystyle\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w(\rho)}}\right)\operatorname{ch} L(\mu) = \sum_{\nu\in P_+} n_{\lambda,\mu}^{\nu}\left(\frac{\displaystyle\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w(\nu+\rho)}}{\displaystyle\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w(\rho)}}\right).$$

まず，この両辺の分母を払う:

$$\left(\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w(\lambda+\rho)}\right)\operatorname{ch} L(\mu) = \sum_{\nu\in P_+} n_{\lambda,\mu}^{\nu}\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w(\nu+\rho)}.$$

$w(\operatorname{ch} L(\mu)) = \operatorname{ch} L(\mu)$ であることに注意すると，

$$\left(\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w(\lambda+\rho)}w(\operatorname{ch} L(\mu))\right) = \sum_{\nu\in P_+} n_{\lambda,\mu}^{\nu}\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w(\nu+\rho)}.$$

$m_\mu(\eta) := \dim L(\mu)_\eta$ とすると，

$$\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}\sum_{\eta\in P(\mu)} m_\mu(\eta)e^{w(\lambda+\eta+\rho)} = \sum_{\nu\in P_+} n_{\lambda,\mu}^{\nu}\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w(\nu+\rho)} \tag{6.2}$$

となる．ここで，$P(\mu)$ は $L(\mu)$ の weight system である．

$\eta\in P(\mu)$ に対して，$[\lambda+\eta+\rho]\in P_+$ および $p(\lambda,\eta)\in\{-1,0,1\}$ を以下のように定義する: $P(\mu)$ が W-不変であることより，$W(\lambda+\eta+\rho)\subset(\lambda+\mu+\rho)-Q_+$ であることがわかる．したがって，Lemma 5.2 より，$W(\lambda+\eta+\rho)\subset X$ であることが分かる．$[\lambda+\eta+\rho]$ で $W(\lambda+\eta+\rho)\cap C$ に含まれる唯一の weight を表す．さて $\eta\in P(\mu)$ に対して，

$$W^\eta := \bigl\{w\in W \mid w(\lambda+\eta+\rho) = [\lambda+\eta+\rho]\bigr\}$$

と定める．このとき，$[\lambda+\eta+\rho]$ が strictly dominant であることと，$\#W^\eta = 1$ であることが同値である．また，これは $\langle\lambda+\eta+\rho,\beta^\vee\rangle = 0$ となる real root β が存在しないこととも同値である．$\eta\in P(\mu)$ に対して，$p(\lambda,\mu)$ を次で定義する．

$$p(\lambda,\eta) := \begin{cases}(-1)^{\ell(w)} & \text{if } W^\eta = \{w\}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

さて，(6.2) から，strictly dominant weight に関する項のみ抜きだすと，

$$\sum_{\eta\in P(\mu)} p(\lambda,\eta)m_\mu(\eta)e^{[\lambda+\eta+\rho]} = \sum_{\nu\in P_+} n_{\lambda,\mu}^{\nu}e^{\nu+\rho}$$

となる．この両辺に $\left(\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}w\right)/\left(\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w(\rho)}\right)$ を作用させると，

$$\sum_{\eta\in P(\mu)} p(\lambda,\eta)m_\mu(\eta)\operatorname{ch} L([\lambda+\eta+\rho]-\rho) = \sum_{\nu\in P_+} n_{\lambda,\mu}^{\nu}\operatorname{ch} L(\nu)$$

が得られる. Theorem 5.1 より, $m_\mu(\eta) = \#\{\pi \in \mathbb{B}(\mu) \mid \pi(1) = \eta\}$ であることに注意すると,

$$\sum_{\pi \in \mathbb{B}(\mu)} p(\lambda, \pi(1)) \operatorname{ch} L([\lambda + \pi(1) + \rho] - \rho) = \sum_{\nu \in P_+} n_{\lambda,\mu}^{\nu} \operatorname{ch} L(\nu) \tag{6.3}$$

となる. 以下では (6.3) の左辺を調べて, $n_{\lambda,\mu}^{\nu}$ を求める.

まず $\pi \in \mathbb{B}(\mu)$ が λ-dominant L-S path の場合, $\lambda + \pi(1) + \rho$ は strictly dominant integral weight であるから, $[\lambda + \pi(1) + \rho] - \rho = \lambda + \pi(1)$ および $p(\lambda, \pi(1)) = 1$ である. したがって, Theorem 6.2 を示すには, (6.3) の左辺において, λ-dominant ではない L-S path に関する項が cancel しあうことを示せばよい. すなわち, 以下では $M := \{\pi \in \mathbb{B}(\mu) \mid \pi \text{ is not } \lambda\text{-dominant}\}$ とし,

$$\sum_{\pi \in M} p(\lambda, \pi(1)) \operatorname{ch} L([\lambda + \pi(1) + \rho] - \rho) = 0 \tag{6.4}$$

となることを示す. $\pi \in M$ に対して,

$$s^\pi := \min\{t \in [0,1] \mid \langle \lambda + \pi(t), \alpha_i^\vee \rangle = -1 \text{ for some } i \in I\}$$

とおく (L-S path の integrality property と π が λ-dominant でないことから, このような s^π が存在することが分かる). また

$$t_i^\pi := \min\{t \in [0,1] \mid \langle \lambda + \pi(t), \alpha_i^\vee \rangle = -1\}$$

とする. ここで, t_i^π の定義で条件にあう $t \in [0,1]$ が存在しないときは, $t_i^\pi := \infty$ と定める. ここで,

$$M_{i_1,\dots,i_r} := \left\{ \pi \in M \;\middle|\; \begin{array}{l} s^\pi = t_{i_j}^\pi \text{ for } j = 1, 2, \dots, r, \\ s^\pi < t_k^\pi \text{ for } k \neq i_j \end{array} \right\}$$

と定義する. このとき, 明らかに $M = \bigsqcup M_{i_1,\dots,i_r}$ である. したがって, (6.4) を示すには, 次を示せばよい:

$$\sum_{\pi \in M_{i_1,\dots,i_r}} p(\lambda, \pi(1)) \operatorname{ch} L(\{\lambda + \pi(1)\}) = 0.$$

$k \in \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ を適当に fix する.

Claim 1. $f_k(M_{i_1,\dots,i_r}) \subset M_{i_1,\dots,i_r} \cup \{\theta\}$.

$\pi \in M_{i_1,\dots,i_r}$ を $f_k\pi \neq \theta$ であるものとし, t_0, t_1 を π に対する f_k の "折り返し点" (2.6) とする. このとき, $0 \le t \le s^\pi$ に対して, $h_k^\pi(t) \ge \langle \lambda, \alpha_k^\vee \rangle - 1 \ge m_k^\pi$ であるから, "折り返し点" の定義 (2.6) から, $s^\pi \le t_0$ となる. したがって, lowering root operator の定義から, $[0, t_0]$ 上, 特に $[0, s^\pi]$ 上で $\pi(t) = (f_k\pi)(t)$ である. したがって, $f_k\pi \in M_{i_1,\dots,i_r}$ である (Claim 1 の証明終).

Claim 2. $\pi \in M_{i_1,\dots,i_r}$ に対して, $e_k\pi \in M_{i_1,\dots,i_r} \iff \langle \lambda, \alpha_k^\vee \rangle + m_k^\pi \le -2$.

t_0, t_1 を π に対する f_k の "折り返し点" (2.6) とする. $\langle \lambda, \alpha_k^\vee \rangle + m_k^\pi \le -2$ のとき, $0 \le t \le s^\pi$ に対して, $h_k^\pi(s^\pi) \ge -\langle \lambda, \alpha_k^\vee \rangle - 1 \ge m_k^\pi + 1$ が成立するので, "折り返し点" の定義 (2.6) から, $s^\pi \ge t_0$ であ

る．したがって, raising root operator の定義より, $0 \le t \le s^{\pi}$ に対して, $\pi(t) = (e_k\pi)(t)$ が成立する．よって, $e_k\pi \in M_{i_1,\ldots,i_r}$ となる．逆に, $\langle \lambda, \alpha_k^{\vee}\rangle + m_k^{\pi} \ge -1$ とすると, $m_k^{e_k\pi} = m_k^{\pi} + 1 \ge -\langle \lambda, \alpha_k^{\vee}\rangle$ となる．ところが, $e_k\pi \in M_{i_1,\ldots,i_r}$ とすると, $m_k^{e_k\pi} \le h_k^{e_k\pi}(s^{e_k\pi}) = -\langle \lambda, \alpha_k^{\vee}\rangle - 1$ より, 矛盾が導かれる．よって, $e_k\pi \notin M_{i_1,\ldots,i_r}$ となる (Claim 2 の証明終).

さて, 必要なら π を $e_k\pi$ で置き換えて, $\langle \lambda, \alpha_k^{\vee}\rangle + m_k^{\pi} = -1$ としてよい．このとき, $\{f_k^j\pi\}_{j=0}^{n} \subset M_{i_1,\ldots,i_r}$ となる．ここで, $n := \varphi_k(\pi) = \max\{m \ge 0 \mid f_k^m\pi \ne \theta\} = h_k^{\pi}(1) - m_k^{\pi}$ である (cf. Lemma 3.1(2)). $M_{i_1,\ldots,i_r}$ はこのような string の disjoint union に分かれるので, Theorem の主張を示すには結局, 次を示せばよい:

$$\sum_{j=0}^{n} p(\lambda, (f_k^j\pi)(1))\, \mathrm{ch}\, L([\lambda + (f_k^j\pi)(1) + \rho] - \rho) = 0 \tag{6.5}$$

$j = 0, 1, \ldots, n$ に対して, $p(\lambda, (f_k^j\pi)(1))$ を調べてみよう．ここでは, $n = \varphi_k(\pi) \in 2\mathbb{Z}$ の場合を考えよう ($n \in 2\mathbb{Z}+1$ も同様である). 記号を簡単にするために $\eta_j := f_k^j\pi$ とおく．$\langle \lambda + \pi(1) + \rho, \alpha_k^{\vee}\rangle = \langle \lambda, \alpha_k^{\vee}\rangle + 1 + h_k^{\pi}(1) = h_k^{\pi}(1) - m_k^{\pi} = \varphi_k(\pi) = n$ および $\eta_j(1) = \pi(1) - j\alpha_k$ より, 以下の string は r_k の作用で不変である:

$$\bigl\{\lambda + \eta_0(1) + \rho,\ \lambda + \eta_1(1) + \rho,\ \ldots,\ \lambda + \eta_n(1) + \rho\bigr\}.$$

このとき, $j = 0, 1, \ldots, n/2$ に対して, $r_k(\lambda + \eta_j(1) + \rho) = \lambda + \eta_{n-j}(1) + \rho$ が成立することに注意する．ある $j = 0, 1, \ldots, n/2 - 1$ に対して, $p(\lambda, \eta_j(1)) = 0$ であったとする．これは, ある real root β に対して, $\langle \lambda + \eta_j(1) + \rho, \beta^{\vee}\rangle = 0$ となっていることと同値である．このとき,

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda + \eta_{n-j}(1) + \rho, (r_k(\beta))^{\vee}\rangle \\
&\qquad = \langle r_k(\lambda + \eta_j(1) + \rho), (r_k(\beta))^{\vee}\rangle = \langle \lambda + \eta_j(1) + \rho, \beta^{\vee}\rangle = 0
\end{aligned}$$

であるから, $p(\lambda, \eta_{n-j}(1)) = 0$ である．一方, $p(\lambda, \eta_j(1)) \ne 0$ のときは, 明らかに

$$\begin{cases} p(\lambda, \eta_j(1)) = -p(\lambda, \eta_{n-j}(1)) \\ [\lambda + \eta_j(1) + \rho] - \rho = [\lambda + \eta_{n-j}(1) + \rho] - \rho \end{cases}$$

が成立する．最後に, $\langle \lambda + \rho + \eta_{n/2}(1), \alpha_k^{\vee}\rangle = 0$ であるから, 定義より, $p(\lambda, \eta_{n/2}(1)) = 0$ である．よって, これらをあわせると,

$$\sum_{j=0}^{n} p(\lambda, \eta_j(1))\, \mathrm{ch}\, L([\lambda + \eta_j(1) + \rho] - \rho) = 0$$

となり, 求めたい式 (6.5) が得られた. □

7 New Proof of the P-R-V Conjecture.

$\lambda, \mu \in P_+$ とする．また, $\eta \in X$ に対して, $[\eta]$ で, $W\eta \cap C$ に含まれる唯一つの weight を表すことにする (cf. Theorem 6.2 の証明). まず次の命題を示そう:

Proposition 7.1. $\pi = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s\,;\, a_0, a_1, \ldots, a_s)$ を shape μ の L-S path で, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ s-1$ に対して, $\lambda + \pi(a_i)$ が dominant weight であるようなものとする．このとき, λ-dominant な L-S path π' で, $\lambda + \pi'(1) = [\lambda + \pi(1)]$ であるものが存在する．

Proof. まず, Proposition の仮定をみたす $\pi \in \mathbb{B}(\mu)$ が, λ-dominant であることと, $\lambda + \pi(a_s) = \lambda + \pi(1)$ が dominant integral weight であることが同値であることに注意しよう．

さて, 命題を $\mathrm{depth}(\pi)$ に関する induction で示そう (cf. Theorem 4.14 の証明). $\mathrm{depth}(\pi) = 0$ のときは, Theorem 4.14 より $\pi = \pi_\mu$ であるから, π' として π 自身をとればよい．$\mathrm{depth}(\pi) \geq 1$ とする．もし, π が λ-dominant である場合は, $\pi' = \pi$ とすればよい．以下では, π が λ-dominant でない場合を考える．まず $\langle \lambda + \pi(1), \alpha_i^\vee \rangle < 0$ となる $i \in I$ を考える．このような $i \in I$ のうちで, $\langle \lambda + \pi(t), \alpha_i^\vee \rangle = 0$ となる $t \in [a_{s-1}, 1]$ (unique) が最小になるもの $k \in I$ を取り fix する．この k に対して, $x \in [a_{s-1}, 1]$ を $\langle \lambda + \pi(x), \alpha_k^\vee \rangle = 0$ を満たす (唯一つの) 点とし, $n := \langle \lambda + \pi(1), \alpha_k^\vee \rangle < 0$ とおく．このとき, $h_k^\pi(t)$ は $t = 1$ でのみ最小値 n を取るので, $\pi' := e_k^{-n}\pi \neq \theta$ となる．L-S path π に対する e_k の作用を考えると (cf. §4 での計算, および Lemma 3.4(1)),

$$\pi' = \begin{cases} (\nu_1, \ldots, \nu_{s-1}, r_\alpha(\nu_s)\,;\, a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}, a_s) & \text{if } x = a_{s-1} \\ (\nu_1, \ldots, \nu_{s-1}, \nu_s, r_\alpha(\nu_s)\,;\, a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}, x_0, a_s) & \text{if } x > a_{s-1} \end{cases}$$

となるので, x の定義から, π' は Proposition の仮定を満たしていることが分かり, また $\mathrm{depth}(\pi') < \mathrm{depth}(\pi)$ であるから, induction の仮定より, $[\lambda + \pi''(1)] = [\lambda + \pi'(1)]$ となる λ-dominant な L-S path π'' が存在する．また, $\lambda + \pi'(1) = r_k(\lambda + \pi(1))$ が成立するので, $[\lambda + \pi(1)] = [\lambda + \pi'(1)] = [\lambda + \pi''(1)]$ となる．したがって, 命題が証明された． □

この Proposition の系として, P-R-V conjecture が証明される．

Corollary 7.2. $w_1,\ w_2 \in W$ とする．$\nu := w_1(\lambda) + w_2(\mu)$ が, dominant integral weight であったとすると, $L(\nu)$ は $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ の既約分解に現れる．

Proof. まず, $w_1(\lambda) + w_2(\mu) = [\lambda + w_1^{-1}w_2(\mu)]$ であることに注意する．さらに, L-S path $\pi = (w_1^{-1}w_2(\mu)\,;\, 0, 1)$ は前の Proposition の仮定 ($s = 1$ の場合) を満たしている．したがって, λ-dominant L-S path $\pi' \in \mathbb{B}(\mu)$ で, $\lambda + \pi'(1) = [\lambda + \pi(1)] = [\lambda + w_1^{-1}w_2(\mu)] = \nu$ となるものが存在する．したがって, Theorem 6.2 より, 主張が得られる． □

8 Branching Rule.

$S \subset I$ の部分集合とし, $\mathfrak{g}_S$ を $\{x_i, y_i \mid i \in S\}$ と $\mathfrak{h}$ で生成される $\mathfrak{g}(A)$ の subalgebra とする (Levi subalgebra).

Definition 8.1. $\lambda \in P_+$ とし, $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ とする． このとき, π が $\mathfrak{g}_S$-dominant であるとは, $\{\pi(t) \mid t \in [0,1]\}$ が $\mathfrak{g}_S$ の root system に関する dominant Weyl chamber $C_S := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0 \text{ for all } i \in S\}$ に含まれているときに言う．

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, $L_S(\lambda)$ で highest weight λ の irreducible highest weight $\mathfrak{g}_S$-module を表す. このセクションの目標は次の branching rule を示すことである:

Theorem 8.2. $L(\lambda)$ は $\mathfrak{g}_S$-module として, 次のように分解する:

$$L(\lambda) = \bigoplus_{\substack{\pi \in \mathbb{B}(\lambda) \text{ s.t.} \\ \mathfrak{g}_S\text{-dominant}}} L_S(\pi(1)). \tag{8.1}$$

Proof. n_λ^ν で $L(\lambda)$ における $L_S(\nu)$ の重複度を表すことにする: $L(\lambda) = \bigoplus_{\nu \in (P_S)_+} n_\lambda^\nu L_S(\nu)$. ここで, $(P_S)_+ := \left\{\lambda \in P \mid \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ for all } i \in S\right\}$ である. character を考えると, $\operatorname{ch} L(\lambda) = \sum_{\nu \in (P_S)_+} n_\lambda^\nu \operatorname{ch} L_S(\nu)$ が成立する. $m_\lambda(\eta) := \dim L(\lambda)_\eta$ とすると, Weyl-Kac formula より

$$\sum_{\eta \in P(\lambda)} m_\lambda(\eta) e^\eta = \sum_{\nu \in (P_S)_+} n_\lambda^\nu \left(\frac{\displaystyle\sum_{w \in W_S} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\nu+\rho)}}{\displaystyle\sum_{w \in W_S} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\rho)}} \right)$$

が成立する. ここで, $W_S := \langle r_i \mid i \in S \rangle$ である. 左辺の分母を払うと,

$$\sum_{w \in W_S} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\rho)} \sum_{\eta \in P(\lambda)} m_\lambda(\eta) e^\eta = \sum_{\nu \in (P_S)_+} n_\lambda^\nu \sum_{w \in W_S} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\nu+\rho)}$$

$\operatorname{ch} L(\lambda)$ は W-不変, したがって特に W_S-不変であることを用いて, 上の式を変形すると,

$$\sum_{\eta \in P(\lambda)} m_\lambda(\eta) \sum_{w \in W_S} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\eta+\rho)} = \sum_{\nu \in (P_S)_+} n_\lambda^\nu \sum_{w \in W_S} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\nu+\rho)}. \tag{8.2}$$

ここで, 記号を幾つか準備する. まず, $\eta \in P(\lambda)$ はいずれかの $L_S(\nu)$ の weight system に含まれている. よって, $W_S(\eta+\rho) \subset (\eta+\rho) - Q_+$ となる. このことから, $W_S(\eta+\rho)$ は $\mathfrak{g}_S$ の root system に関する Tits cone X_S に含まれていることが分かる (cf. Lemma 5.2). $[\eta+\rho]$ で $W_S(\eta+\rho) \cap C_S$ に含まれる (唯一つ) の元を表す. さらに $\eta \in P(\lambda)$ に対して,

$$W_S^\eta := \left\{w \in W_S \mid w(\eta+\rho) = [\eta+\rho]\right\}$$

と定める. このとき, $[\eta+\rho]$ が $\mathfrak{g}_S$ の root system に関して strictly dominant integral weight であることと $\# W_S^\eta = 1$ であることは同値であることに注意する. また, これは $\langle \eta+\rho, \beta^\vee \rangle = 0$ となる $\mathfrak{g}_S$ の real root β が存在しないこととも同値である. $\eta \in P(\lambda)$ に対して, $p_S(\eta)$ を次で定める.

$$p_S(\eta) := \begin{cases} (-1)^{\ell(w)} & \text{if } W_S^\eta = \{w\}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

さて, (8.2) から $\mathfrak{g}_S$ の root system に関する strictly dominant integral weight に関する項だけを抜きだすと, 次のようになる:

$$\sum_{\eta \in P(\lambda)} p_S(\eta) \, m_\lambda(\eta) e^{[\eta+\rho]} = \sum_{\nu \in (P_S)_+} n_\lambda^\nu e^{\nu+\rho}$$

さらに Theorem 5.1 より, $m_\lambda(\eta) := \{\pi \in \mathbb{B}(\lambda) \mid \pi(1) = \eta\}$ であるから,

$$\sum_{\pi\in\mathbb{B}(\lambda)} p_S(\pi(1)) e^{[\pi(1)+\rho]} = \sum_{\nu\in(P_S)_+} n_\lambda^\nu e^{\nu+\rho}$$

両辺に $\left(\sum_{w\in W_S}(-1)^{\ell(w)}w\right)/\left(\sum_{w\in W_S}(-1)^{\ell(w)}e^{w(\rho)}\right)$ に作用させると,

$$\sum_{\pi\in\mathbb{B}(\lambda)} p_S(\pi(1)) \operatorname{ch} L_S([\pi(1)+\rho]-\rho) = \sum_{\nu\in(P_S)_+} n_\lambda^\nu \operatorname{ch} L_S(\nu). \tag{8.3}$$

となる. この式の左辺を計算して, n_λ^ν を求めよう. 以下, dominant, strictly dominant などと言った場合は, 断らない限り, $\mathfrak{g}_S$ の root system に関して考えているものとする

まず π が $\mathfrak{g}_S$-dominant L-S path の場合, $\pi(1)+\rho$ は strictly dominant weight であるから, $[\pi(1)+\rho] = \pi(1)+\rho$ および $p_S(\pi(1)) = 1$ である. したがって, Theorem 8.2 を示すには, (8.3) の左辺において, $\mathfrak{g}_S$-dominant ではない L-S path に関する項が cancel しあうことを示せばよい. すなわち, $M_S := \{\pi \in \mathbb{B}(\lambda) \mid \pi \text{ is not } \mathfrak{g}_S\text{-dominant}\}$ とし,

$$\sum_{\pi\in M_S} p_S(\pi(1)) \operatorname{ch} L_S([\pi(1)+\rho]-\rho) = 0. \tag{8.4}$$

を示せばよい. $\pi \in M_S$ に対して,

$$s^\pi := \min\{t \in [0,1] \mid h_i^\pi(t) = -1 \text{ for some } i \in S\}$$

とおく. また $i \in S$ に対して,

$$t_i^\pi := \min\{t \in [0,1] \mid h_i^\pi(t) = -1\}$$

とする. ここで, t_i^π の定義で条件にあう t が存在しないときは, $t_i^\pi := \infty$ と定める. さらに

$$(M_S)_{i_1,\dots,i_r} := \left\{\pi \in M_S \;\middle|\; \begin{array}{l} s^\pi = t_{i_j}^\pi \text{ for } j = 1,\,2,\,\dots,\,r, \\ s^\pi < t_k^\pi \text{ for } k \neq i_j \end{array}\right\}$$

と定義する. このとき, $M_S = \bigsqcup (M_S)_{i_1,\dots,i_r}$ であるから, (8.4) を示すには次を示せばよい.

$$\sum_{\pi\in(M_S)_{i_1,\dots,i_r}} p_S(\pi(1)) \operatorname{ch} L_S([\pi(1)+\rho]-\rho) = 0. \tag{8.5}$$

$k \in \{i_1,\,\dots,\,i_r\}$ を適当に fix する.

Claim 1. $f_k((M_S)_{i_1,\dots,i_r}) \subset (M_S)_{i_1,\dots,i_r} \cup \{\theta\}$.

$\pi \in (M_S)_{i_1,\dots,i_r}$ を $f_k\pi \neq \theta$ であるものとし, (t_0, t_1) を π に対する f_k の “折り返し点” (2.6) とする. このとき, $0 \le t \le s^\pi$ に対して, $h_k^\pi(t) \ge -1 \ge m_k^\pi$ であるから, “折り返し点” の定義 (2.6) から, $s^\pi \le t_0$ となる. したがって, lowering root operator の定義から, $[0, s^\pi]$ 上で $\pi(t) = (f_k\pi)(t)$ である. したがって, $f_k\pi \in (M_S)_{i_1,\dots,i_r}$ である (Claim 1 の証明終).

Claim 2. $\pi \in (M_S)_{i_1,\dots,i_r}$ に対して, $e_k\pi \in (M_S)_{i_1,\dots,i_r} \iff m_k^\pi \le -2$.

t_0, t_1 を π に対する f_k の "折り返し点" (2.6) とする．$m_k^\pi \le -2$ のとき, $0 \le t \le s^\pi$ に対して, $h_k^\pi(s^\pi) \ge -1 \ge m_k^\pi + 1$ が成立するので, "折り返し点" の定義 (2.6) から, $s^\pi \ge t_0$ である．したがって, raising root operator の定義より, $0 \le t \le s^\pi$ に対して, $\pi(t) = (e_k\pi)(t)$ が成立する．よって, $e_k\pi \in (M_S)_{i_1,\dots,i_r}$ となる．逆に, $m_k^\pi = -1$ とすると, $m_k^{e_k\pi} = m_k^\pi + 1 = 0$ となる．$e_k\pi \in (M_S)_{i_1,\dots,i_r}$ とすると, $m_k^{e_k\pi} \le -1$ となり, 矛盾．よって, $e_k\pi \notin (M_S)_{i_1,\dots,i_r}$ となる (Claim 2 の証明終).

ここで必要なら, π を $e_k\pi$ で置き換えて, $m_k^\pi = -1$ としてもよい．$\{f_k^j\pi\}_{j=0}^n \subset (M_S)_{i_1,\dots,i_r}$ である．ここで, $n := \varphi_k(\pi) = \max\{m \ge 0 \mid f_k^m\pi \ne \theta\} = h_k^\pi(1) - m_k^\pi$ である (cf. Lemma 3.1(2)). $(M_S)_{i_1,\dots,i_r}$ はこのような string の disjoint union に分かれるので, (8.5) を示すには結局, 次を示せばよいことが分かる:

$$\sum_{j=0}^{n} p_S((f_k^j\pi)(1))\,\mathrm{ch}\,L_S([(f_k^j\pi)(1)+\rho]-\rho) = 0 \tag{8.6}$$

$j = 0, 1, \dots, n$ に対して, $p_S((f_k^j\pi)(1))$ を調べてみよう．ここでは, $n = \varphi_k(\pi) \in 2\mathbb{Z}$ の場合を考えよう ($n \in 2\mathbb{Z}+1$ の場合も同様である)．また記号を簡単にするために $\eta_j := f_k^j\pi$ とおく．$\langle \pi(1)+\rho, \alpha_k^\vee\rangle = h_k^\pi(1)+1 = h_k^\pi(1) - m_k^\pi = \varphi_k(\pi) = n$ および $\eta_j(1) = \pi(1) - j\alpha_k$ より, 以下の string は r_k で不変である:

$$\{\eta_0(1)+\rho,\, \eta_1(1)+\rho,\, \dots,\, \eta_n(1)+\rho\}.$$

このとき, $j = 0, 1, \dots, n/2$ に対して, $r_k(\eta_j(1)+\rho) = \eta_{n-j}(1)+\rho$ が成立することに注意する．ある $j = 0, 1, \dots, n/2-1$ に対して, $p_S(\eta_j(1)) = 0$ であったとする．$p_S(\eta)$ を導入したときに注意したように, これは $\langle \eta_j(1)+\rho, \beta^\vee\rangle = 0$ となる $\mathfrak{g}_S$ の real root β が存在することと同値である．このとき,

$$\langle \eta_{n-j}(1)+\rho, (r_k(\beta))^\vee\rangle = \langle r_k(\eta_j(1)+\rho), (r_k(\beta))^\vee\rangle = \langle \eta_j(1)+\rho, \beta^\vee\rangle = 0$$

であるから, $p_S(\eta_{n-j}(1)) = 0$ である．一方, $p_S(\eta_j(1)) \ne 0$ のときは, 明らかに

$$\begin{cases} p_S(\eta_j(1)) = -p_S(\eta_{n-j}(1)) \\ [\eta_j(1)+\rho]-\rho = [\eta_{n-j}(1)+\rho]-\rho \end{cases}$$

が成立する．最後に, $\langle \eta_{n/2}(1)+\rho, \alpha_k^\vee\rangle = 0$ であるから, 定義より, $p_S(\eta_{n/2}(1)) = 0$ である．よって, これらをあわせると,

$$\sum_{j=0}^{n} p_S(\eta_j(1))\,\mathrm{ch}\,L([\eta_j(1)+\rho]-\rho) = 0$$

となり, 求めたい式 (8.5) が得られた. $\square$

References.

[1] V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, 3rd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[2] P. Littelmann, A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras, Invent. Math. **116** (1994), 329-346.

[3] P. Littelmann, Paths and root operators in representation theory, Ann. of Math. (2) **142** (1995), 499-525.

[4] P. Littelmann, Characters of representations and paths in $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, in "Representation Theory and Automorphic Forms" (T. N. Bailey and A. W. Knapp, Eds.), pp. 29–49, Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 61, Amer. Math. Soc., Providence, 1997.

[5] P. Littelmann, The path model, the quantum Frobenius map and standard monomial theory, in "Algebraic Groups and Their Representations" (R. W. Carter and J. Saxl, Eds.), pp. 175–212, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[6] R. V. Moody and A. Pianzola, *Lie Algebras with Triangular Decompositions*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, Wiley-Interscience, New York, 1995.