D型リー代数の包絡環の split した実現における中心元

和地輝仁
北海道工業大・総合教育研究部

1 序

講演に際しての第一の方針は, リー代数の表現論を専門としない方にも出来る限りわかりやすく話をしようということであった. この論説でも基本的な定義や事実をなるべく省略しないようにこころがける.

講演タイトルを organizer に送った時点では, D 型リー代数でしか結果が得られていなかったが, 講演時までに B 型リー代数でも結果が得られた. しかし, アナウンスされたタイトルのままで講演を行ったので, この論説も同じタイトルとする.

§2 では, リー代数の基本的なことがらや記号を準備する. 慣れている方は読み飛ばしてもさしつかえない. 本論説の主題は, 行列式を用いた中心元を直交リー代数で構成することであるが, §3 では, それを一般線形リー代数の場合に見てみる (Capelli 恒等式 [Cap90]). §4 では, Howe と Umeda [HU91] による直交リー代数の交代行列による実現のもとでの行列式を用いた中心元の構成を見る. この構成は, 直交リー代数の実現に強く依存しており, split 実現を含め他の実現にそのまま適用することはできない. §5 では, 直交リー代数の split 実現のもとでの行列式を用いた中心元の構成を行う. これが本論説の主題である. §6 では, §5 での構成から自然に類推される斜交リー代数における行列式を用いた中心元の構成を試みても, 直交リー代数と同様の方法ではうまくいかないようであることを見る.

2 リー代数とその普遍包絡環

定義 2.1. $\mathfrak{g}$ が, 体 K 上の**リー代数**であるとは, $\mathfrak{g}$ が K-ベクトル空間であり, 次の条件 (L1)–(L3) をみたす**ブラケット積** $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ を備えていることをいう:

(L1) ブラケット積は双線形,

(L2) $[X,X]=0 \quad (X \in \mathfrak{g})$,

(L3) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0 \ (X,Y,Z \in \mathfrak{g}) \quad$ (**Jacobi identity**).

従って $\mathfrak{g}$ がリー代数であれば (L1), (L2) より,

(L2′) $[X,Y]+[Y,X]=0 \quad (X\in\mathfrak{g})$

が成り立つ. □

これ以降, 体は複素数体 $\mathbf{C}$ に固定し, **複素リー代数**を考える.

定義 2.2. $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ がリー代数のとき, $f\colon \mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ がリー代数の**準同型写像**であるとは, 線形かつ $[f(X),f(Y)]=f([X,Y])$ $(X,Y\in\mathfrak{g}_1)$ をみたすことをいう. f がさらに線形同型ならば, リー代数の**同型写像**であるといい, $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ は**同型**であるという. □

例 2.3. **一般線形リー代数** $\mathfrak{gl}_n=\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C})=\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$. 交換子積 $[X,Y]=XY-YX$ をブラケット積としてリー代数となる (Jacobi identity を満足することを確かめればよい). □

定義 2.4. リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{g}'$ が, $\mathfrak{g}$ のブラケット積に関してリー代数であるとき, $\mathfrak{g}'$ を $\mathfrak{g}$ の**部分代数**という. $\mathfrak{g}$ のふたつの部分ベクトル空間 $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ に対して, $[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2]$ を $[X_1,X_2]$ $(X_i\in\mathfrak{g}_i)$ たちの 1 次結合のなす部分空間とすると, $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{g}'$ が部分代数であるための必要十分条件は, $[\mathfrak{g}',\mathfrak{g}']\subset\mathfrak{g}'$ となることである.

$\mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{g}$ の部分代数であり, さらに $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}']\subset\mathfrak{g}'$ をみたすとき, $\mathfrak{g}'$ を $\mathfrak{g}$ の**イデアル**という. $\{0\}$ と $\mathfrak{g}$ 自身は, $\mathfrak{g}$ の**自明な**イデアルである. 自明なイデアル以外にイデアルを持たず, 次元が 1 より大きいリー代数を**単純**であるという. □

例 2.5. 一般線形リー代数 $\mathfrak{gl}_n$ の部分代数は**線形リー代数**と呼ばれ, その例として,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{sl}_n&=\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})=\{X\in\mathfrak{gl}_n\ ;\ \mathrm{Tr}\,X=0\},\\
\mathfrak{o}_n&=\mathfrak{o}(n,\mathbf{C})=\{X\in\mathfrak{gl}_n\ ;\ {}^tX+X=0\},\\
\mathfrak{sp}_n&=\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C})=\left\{X=\begin{pmatrix}A & B\\ C & -{}^tA\end{pmatrix}\in\mathfrak{gl}_{2n}\ ;\ \begin{array}{l}A,B,C\in\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C}),\\ {}^tB-B={}^tC-C=0\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

がある. 例えば, $\mathfrak{sl}_n$ が部分代数であることは, $X,Y\in\mathfrak{gl}_n$ に対して $\mathrm{Tr}[X,Y]=0$ だから, $[\mathfrak{sl}_n,\mathfrak{sl}_n]\subset\mathfrak{sl}_n$ であることからわかる. さらに, $[\mathfrak{gl}_n,\mathfrak{sl}_n]\subset\mathfrak{sl}_n$ であるから, $\mathfrak{sl}_n$ は $\mathfrak{gl}_n$ のイデアルでもある. 従って, $\mathfrak{gl}_n$ は単純リー代数ではない.

$\mathfrak{o}_n$ と $\mathfrak{sp}_n$ が $\mathfrak{gl}_n$ の部分代数であることも簡単にわかる (ただし, イデアルではない). さらに, 証明はしないが, $\mathfrak{sl}_n$ $(n\geq 2)$, $\mathfrak{o}_n$ $(n\geq 3)$, $\mathfrak{sp}_n$ $(n\geq 1)$ は, 単純リー代数である. □

有限次元複素単純リー代数の分類は知られていて, $\mathfrak{sl}_n$ は A_{n-1} 型 $(n\geq 2)$, $\mathfrak{o}_{2m+1}$ は B_m 型 $(m\geq 1)$, $\mathfrak{sp}_n$ は C_n 型 $(n\geq 1)$, $\mathfrak{o}_{2m}$ は D_m 型 $(m\geq 1)$ と呼ばれる. これ

らは次元の小さいところでは同型なものもあり, $\mathrm{A}_1 \simeq \mathrm{B}_1 \simeq \mathrm{C}_1 \simeq \mathrm{D}_1$, $\mathrm{B}_2 \simeq \mathrm{C}_2$, $\mathrm{D}_2 \simeq \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_1$, $\mathrm{D}_3 \simeq \mathrm{A}_3$ という関係がある. 単純リー代数には **Cartan 部分代数** (極大可換部分代数) の次元として**階数**が定義されるが, 上の A_n, B_n, C_n, D_n 型の単純リー代数の階数は n である. 階数は (詳しく説明しないし, この論説でも用いない) **Dynkin 図形**の頂点の個数とも等しい.

定義 2.6. $\mathfrak{g}$ がリー代数のとき, $\mathfrak{g}$ の**普遍包絡環 (universal enveloping algebra)** $U(\mathfrak{g})$ を,

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/([X,Y] - X \otimes Y - Y \otimes X)_{\text{両側イデアル}}$$

で定める. ただし, $T(\mathfrak{g})$ はテンソル代数である. $U(\mathfrak{g})$ における積は, $\overline{X \otimes Y}$ などと書くべきだが, 簡単に XY と書くことにする. $\mathfrak{g}$ が線形リー代数の場合, 行列としての積と普遍包絡環の元としての積は, 文脈で判断するので注意が必要である.

定義より $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ は, 次のような普遍性を持つ唯一の $\mathbf{C}$-代数である: $\mathbf{C}$-代数 U' と線形写像 $j\colon \mathfrak{g} \to U'$ が $j([X,Y]) = j(X)j(Y) - j(Y)j(X)$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ をみたすとき, 次の図式を可換にする $\mathbf{C}$-代数準同型 ϕ が存在する.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & U(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\phi"] \\
& U'
\end{tikzcd}$$

ただし $i\colon \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ は, $\mathfrak{g}$ から $T(\mathfrak{g})$ への自然な埋め込みと, $T(\mathfrak{g})$ から $U(\mathfrak{g})$ への自然な全射の合成である. また, $\mathbf{C}$-代数は単位元をもつとし, その準同型は単位元を単位元にうつすとする. □

上の定義では i が単射であることはわからないが, 次の定理がある.

定理 2.7 (Poincaré-Birkhoff-Witt). $\mathfrak{g}$ がリー代数のとき, 上の定義の $i\colon \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ は単射である. 従って, $\mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$ とみなせる. また, $\{X_1, X_2, \ldots\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底とすると, $\{X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_d}\ ;\ d \geq 0,\ i_1 < \cdots < i_d\}$ は $U(\mathfrak{g})$ の基底である. □

上の定理で構成された $U(\mathfrak{g})$ の基底を **PBW basis** と呼ぶ.

非可換環 $U(\mathfrak{g})$ の中心を $ZU(\mathfrak{g})$ と書く. $\mathfrak{g}$ が有限次元複素単純リー代数の場合, $ZU(\mathfrak{g})$ について次の定理が知られている.

定理 2.8. $\mathfrak{g}$ が階数 n の有限次元複素単純リー代数のとき, 普遍包絡環の中心 $ZU(\mathfrak{g})$ は n 変数多項式環に同型である. □

3 A 型

この節では, 行列式型の中心元の最も簡単な例として, $\mathfrak{gl}_n$ の普遍包絡環の中心元を見てみる. A 型は正確には $\mathfrak{gl}_n$ のトレースゼロの部分代数 $\mathfrak{sl}_n$ であるが, $\mathfrak{gl}_n$ も A 型と呼んでしまうことがある.

E_{ij} を行列単位とし,

$$\mathbf{E} = (E_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathrm{Mat}_n(U(\mathfrak{gl}_n))$$

と定める. 例えば $n = 2$ の場合は, $\mathbf{E} = \left(\begin{smallmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{smallmatrix}\right)$ である. 次に, 行列式を明確に定義しておく. つまり成分が非可換の場合は, 積の順序が重要である.

定義 3.1. $n \times n$ 行列 $\Phi = (\Phi_{ij})$ に対して,

$$\det \Phi = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \Phi_{\sigma(1)1} \cdots \Phi_{\sigma(n)n}$$

と定め, **列-行列式 (column-determinant)** または単に**行列式**と呼ぶ. 定義より, 行に関して交代性をもつ. Φ の成分が互いに可換であれば, 同様に定義される行-行列式 (row-determinant) と一致する.

さらに, より強い対称性 (交代性) をもつ $\mathrm{Det}\,\Phi$ を,

$$\mathrm{Det}\,\Phi = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma') \Phi_{\sigma(1)\sigma'(1)} \cdots \Phi_{\sigma(n)\sigma'(n)}$$

と定め [IU01], **double-determinant** または **symmetrized determinant** と呼ぶ. 定義より, 行と列に関する多重線形性と 2 つの行 (列) の入れ換えに関する交代性をもち, Φ の成分が互いに可換であれば $\det \Phi$ と一致することがわかる. また対角シフト付きの double-determinant $\mathrm{Det}(\Phi; u_1, \ldots, u_n)$ を,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Det}(\Phi; u_1, \ldots, u_n) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma') \left\{ \Phi_{\sigma(1)\sigma'(1)} + u_1 \delta_{\sigma(1)\sigma'(1)} \right\} \cdots \left\{ \Phi_{\sigma(n)\sigma'(n)} + u_n \delta_{\sigma(n)\sigma'(n)} \right\} \end{aligned}$$

で定める. $\mathrm{Det}\,\Phi$ とは異なり Φ の行や列に関する多重線形性や交代性はないが, 少し弱く共役に関する不変性を持つ:

$$\mathrm{Det}(g \Phi g^{-1}; u_1, \ldots, u_n) \qquad (g \in GL(n; \mathbf{C})).$$

□

これらの行列式を用いて, $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元を構成できる.

命題 3.2. 複素数 u に対して, 次で定める $C_n^{\mathfrak{gl}_n}(u)$ は $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心に属する:

$$C_n^{\mathfrak{gl}_n}(u) = \det(\mathbf{E} + u I_n + \mathrm{diag}(n-1, n-2, \ldots, 0)) \qquad \text{(Capelli [Cap90]).}$$

ただし, I_n は d 次単位行列である. また $u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{C}$ に対して次の元も $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心に属する:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{E}; u_1, \ldots, u_n) \qquad \text{(Itoh-Umeda [IU01]).}$$

Proof. Double-determinant は対称性 (交代性) が強く, それを用いて構成したものの方が, 容易に中心元であることを示せる. $g \in GL(n;\mathbf{C})$ に対して,

$$(gE_{ij}g^{-1})_{1\le i,j\le n} = {}^t g\mathbf{E}\,{}^t g^{-1}$$

が成立することに注意すると,

$$\begin{aligned}
&g\,\mathrm{Det}(\mathbf{E};u_1,\dots,u_n)g^{-1}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma,\sigma'\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma')\left\{gE_{\sigma(1)\sigma'(1)}g^{-1}+u_1\delta_{\sigma(1)\sigma'(1)}\right\}\cdots\\
&\qquad\cdots\left\{gE_{\sigma(n)\sigma'(n)}g^{-1}+u_n\delta_{\sigma(n)\sigma'(n)}\right\}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma,\sigma'\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma')\left\{({}^t g\mathbf{E}\,{}^t g^{-1})_{\sigma(1)\sigma'(1)}+u_1\delta_{\sigma(1)\sigma'(1)}\right\}\cdots\\
&\qquad\cdots\left\{({}^t g\mathbf{E}\,{}^t g^{-1})_{\sigma(n)\sigma'(n)}+u_n\delta_{\sigma(n)\sigma'(n)}\right\}\\
&= \mathrm{Det}({}^t g\mathbf{E}\,{}^t g^{-1};u_1,\dots,u_n)\\
&= \mathrm{Det}(\mathbf{E};u_1,\dots,u_n)
\end{aligned}$$

が成立し, 共役に関する $GL(n;\mathbf{C})$-不変性が $\mathfrak{gl}_n$-不変性を導くので, $\mathrm{Det}(\mathbf{E},u_1,\dots,u_n)$ が $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心に属することがわかる.

次に, $C_n^{\mathfrak{gl}_n}(u)$ については, 外積代数を用いた計算により,

$$C_n^{\mathfrak{gl}_n}(u) = \mathrm{Det}(\mathbf{E}+uI_n;n-1,n-2,\dots,0)$$

を示すことができ, 従って中心元であることがわかる. 上の等式を示すためには, $\mathfrak{gl}_n$ の性質を本質的に含む, ある交換関係式が必要であるが, この論説ではこれ以上立ち入らないことにする. □

$1\le d\le n$ に対して, $C_d^{\mathfrak{gl}_n}(u)$ を ($\mathbf{E}$ の d 次主小行列 + 対角シフト) の det を全て加えたもの, つまり,

$$C_d^{\mathfrak{gl}_n}(u) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \sharp I=d}} \det(\mathbf{E}_I+uI_d+\mathrm{diag}(n-1,n-2,\dots,n-d))$$

とおくと, $C_d^{\mathfrak{gl}_n}(u)$ は $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心に属する. ただし, $\mathbf{E}_I$ は添字集合 I で定まる $\mathbf{E}$ の主小行列である. このことは, $C_n^{\mathfrak{gl}_n}(u+v)$ を factorial power $v^{(d)}$ で展開した等式

$$C_n^{\mathfrak{gl}_n}(u+v) = \sum_{d=0}^{n} v^{(d)}C_d^{\mathfrak{gl}_n}(u),$$

$$v^{(d)} = \begin{cases}1 & (d=0),\\ v(v-1)\cdots(v-d+1) & (d>0),\end{cases}$$

よりわかる．上の等式は差分作用素 $\Delta f(v)=f(v+1)-f(v)$ を用いて示すことができる．さらにこれらの中心元は, 次のように $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心の代数独立な生成系をなしていることが知られている．

命題 3.3. u を複素数とするとき, $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心は, $C_1^{\mathfrak{gl}_n}(u),\dots,C_n^{\mathfrak{gl}_n}(u)$ で生成され, これらの元が $\mathbf{C}$ 上生成する多項式環に同型である． □

例 3.4. $n=2$ の場合, 例えば $u=0$ とすると,

$$C_1^{\mathfrak{gl}_2}(0)=E_{11}+E_{22}, \qquad C_2^{\mathfrak{gl}_2}(0)=(E_{11}+1)E_{22}-E_{21}E_{12}$$

であり, これらが $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心の生成系をなす． □

注意 3.5. パーマネントを用いた中心元もある □

4 B 型, D 型 その 1

この節では, 直交リー代数を交代行列で実現した場合の, 行列式型の中心元の構成 [HU91] を見る．

まず, A 型の場合と同様に, リー代数の元を並べた行列 $\mathbf{A}$ を,

$$\begin{aligned} A_{ij}&=E_{ij}-E_{ji}\in\mathfrak{o}_n,\\ \mathbf{A}&=(A_{ij})_{1\le i,j\le n}\in \mathrm{Mat}_n(U(\mathfrak{o}_n)) \end{aligned}$$

で定める．すると, A 型の場合の $\mathbf{E}$ を $\mathbf{A}$ に変えただけといってもよい命題が成立する．

命題 4.1. 次で定める $C_n^{\mathfrak{o}_n}(u)$ は, 普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心に属する:

$$C_n^{\mathfrak{o}_n}(u)=\det(\mathbf{A}+uI_n+\mathrm{diag}(n-1,n-2,\dots,0)) \quad \text{(Howe-Umeda [HU91]).}$$

また $u_1,\dots,u_n\in\mathbf{C}$ に対して次の元も $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心に属する:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A};u_1,\dots,u_n) \qquad \text{(Itoh-Umeda [IU01]).}$$

Proof. A 型の場合と同じく, double-determinant を用いたものの方が中心元であることを示すのは容易である．$\mathrm{Det}(\mathbf{A};u_1,\dots,u_n)$ が中心元であることを示す鍵となる等式は,

$${}^t g^{-1}(gA_{ij}g^{-1})\,{}^t g=\mathbf{A} \qquad (g\in O(n;\mathbf{C})=\{x\in GL(n;\mathbf{C})\ ;\ {}^t x x=I_n\})$$

であり, A 型の場合と同様に計算で簡単に示せる．これにより $\mathrm{Det}(\mathbf{A};u_1,\dots,u_n)$ が中心元であることが直ちにわかる．

次に, $C_n^{\mathfrak{o}_n}(u)$ については, A 型の場合よりも計算は複雑になるが,

$$C_n^{\mathfrak{o}_n}(u) = \mathrm{Det}(\mathbf{A}; n-1, n-2, \ldots, 0)$$

であることが, 外積代数を用いた計算で (Harish-Chandra 同型の像を経由せずに) 示されるので, 中心元であることがわかる. □

注意 4.2. Double-determinant は強い対称性を持つため, double-determinant を用いた中心元の構成は直交リー代数の実現の仕方によらず可能である. □

さらに, 小行列を用いた中心元の構成も A 型と同様にできる. $1 \leq d \leq n$ に対して,

$$C_d^{\mathfrak{o}_n}(u) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ \sharp I = d}} \det(\mathbf{A}_I + uI_d + \mathrm{diag}(n-1, n-2, \ldots, n-d))$$

とおき, $C_0^{\mathfrak{o}_n}(u) = 1$ と約束すると,

$$C_n^{\mathfrak{o}_n}(u+v) = \sum_{d=0}^{n} v^{(d)} C_d^{\mathfrak{o}_n}(u)$$

が成立し, 従って $C_d^{\mathfrak{o}_n}(u)$ が中心元であることがわかる. そして, これらを用いて $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心元の代数独立な生成系を構成できることも知られている.

命題 4.3. u を複素数とする. $n = 2m+1$ のとき $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心は,

$$C_2^{\mathfrak{o}_n}(u), C_4^{\mathfrak{o}_n}(u), \ldots, C_{2m}^{\mathfrak{o}_n}(u)$$

で $\mathbf{C}$ 上生成される m 変数多項式環に同型である. また $n = 2m$ のとき $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心は,

$$C_2^{\mathfrak{o}_n}(u), C_4^{\mathfrak{o}_n}(u), \ldots, C_{2m-2}^{\mathfrak{o}_n}(u), \mathrm{Pf}\,\mathbf{A}$$

で $\mathbf{C}$ 上生成される m 変数多項式環に同型である. ただし, $2m \times 2m$ 交代行列 Φ に対して, **パフィアン** $\mathrm{Pf}\,\Phi$ は

$$\mathrm{Pf}\,\Phi = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2m}} \mathrm{sgn}(\sigma) \Phi_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots \Phi_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}$$

で定められる. □

注意 4.4. $d = 2k+1$ の場合は, $C_{2k+1}^{\mathfrak{o}_n}(u)$ は $C_2^{\mathfrak{o}_n}(u), \ldots, C_{2k}^{\mathfrak{o}_n}(u)$ で表すことができる. また, $C_{2k+1}^{\mathfrak{o}_n}((1-n)/2) = 0$ である. □

注意 4.5. パフィアンを用いた中心元もある [IU01]. パフィアンの定義を見るとわかるように, double-determinant と同様な対称性のある形をしているので, パフィアンを用いた中心元の構成は直交リー代数の実現の仕方によらず可能である (cf. 命題 6.2). □

5 B型, D型 その2

この節では, 直交リー代数の split 実現のもとでの行列式型の中心元の構成を行う．前節の Howe-Umeda による中心元の構成は実現に強く依存しており, split 実現でそのまま適用することができない. ただ, split 実現での構成も実現に強く依存しており, 他の実現にそのまま適用することはできない.

まず split 実現を定義する．直交リー代数の実現は, n 次元ベクトル空間の内積をひとつとり, それを不変にする $\mathfrak{gl}_n$ の部分代数として得られる．$n \times n$ 非退化対称行列

$$S_n = (\delta_{i,n+1-j})_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

をとり,

$$\mathfrak{o}(S_n) = \{X \in \mathfrak{gl}_n \ ; \ {}^tXS_n + S_nX = 0\}$$

と定め, これを直交リー代数の **split 実現**と呼ぶ. $\mathfrak{o}(S_n)$ は, 主対角線ではない方の対角線に関して交代的である $\mathfrak{gl}_n$ の元全体のなす部分代数であり, リー代数として $\mathfrak{o}_n$ と同型である.

次にこれまでと同様に $\mathbf{F}$ を定める:

$$\begin{aligned} F_{ij} &= E_{ij} - E_{n+1-j,n+1-i} \in \mathfrak{o}(S_n), \\ \mathbf{F} &= (F_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{Mat}_n(U(\mathfrak{o}(S_n))). \end{aligned}$$

この F_{ij} と $\mathbf{F}$ の定め方は, 実は非退化対称行列 S_n を決めれば, ある意味で自然に決まるものである (cf. §6). Double-determinant を用いた中心元は前節同様実現によらず次のように構成できる (cf. 命題 6.2).

命題 5.1. $u_1, \dots, u_n \in \mathbf{C}$ に対して, 次の元は $U(\mathfrak{o}(S_n))$ の中心に属する:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{F}; u_1, \dots, u_n) \qquad\qquad \text{(Itoh-Umeda [IU01]).}$$

Proof. リー代数 $\mathfrak{o}(S_n)$ に対応するリー群 $O(S_n)$ は,

$$O(S_n) = \{x \in GL(n;\mathbf{C}) \ ; \ {}^txS_nx = S_n\}$$

で定められ, 等式

$${}^tg^{-1}(gF_{ij}g^{-1})\,{}^tg = \mathbf{F} \qquad\qquad (g \in O(S_n)) \tag{5.1}$$

が成り立つ．従って, §3 や §4 と同じく, $\mathrm{Det}(\mathbf{F}; u_1, \dots, u_n)$ が中心元であることが示される. □

しかし, §3 や §4 と同じように, $\mathbf{F}$ に対角シフト $(n-1, n-2, \ldots, 0)$ を入れて列-行列式 det を考えても, 中心元にはならない. 記号の簡単のために n-tuple $\tilde{\natural}_n$ を,

$$\tilde{\natural}_n = \begin{cases} (m-1, m-2, \ldots, 0; 0, -1, \ldots, -m+1) & (n = 2m), \\ (m-1/2, m-3/2, \ldots, 1/2; 0; -1/2, -3/2, \ldots, -m+1/2) & \\ & (n = 2m+1) \end{cases}$$

と定める. 列-行列式を用いた中心元は, 次のように構成される.

定理 5.2. 複素数 u に対して, 次で定める $C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ は, 普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}(S_n))$ の中心に属する:

$$C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u) = \det(\mathbf{F} + uI_n + \operatorname{diag} \tilde{\natural}_n).$$

□

一般線形リー代数の場合や, 直交リー代数の交代行列による実現の場合は, double-determinant を用いた中心元と等しいことを直接導いて, 列-行列式を用いて構成した元が中心元であることを証明できた. しかし, 上の split 実現の場合は, そのような証明は今のところ見付かっていない. 列-行列式を外積代数を用いて表示して, 各 F_{ij} と可換であることを示すのが, 証明の本質的な方針である. この論説では, 証明についてこれ以上立ち入らないことにする.

注意 5.3. 列-行列式を用いた中心元 $C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ と, double-determinant を用いた中心元との関係は,

$$C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u) = \operatorname{Det}(\mathbf{F}; \tilde{\natural}_n)$$

である. これは, 両辺の Harish-Chandra 同型の像を比較してわかる. □

注意 5.4. 列-行列式を用いた中心元 $C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ における対角シフト $\tilde{\natural}_n$ は, 次のように ‘正ルートの和の半分’ ρ とちょうど対応している.

$\mathfrak{o}(S_n)$ に属する対角行列全体のなす部分代数を $\mathfrak{h}$ とする (Cantan 部分代数). つまり $n = 2m$ または $n = 2m+1$ のとき, $\mathfrak{h} = \mathbf{C}F_{11} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}F_{mm}$ である. $\mathfrak{h}$ の基底 $\{F_{11}, \ldots, F_{mm}\}$ の双対基底を $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$ とすると,

$$\rho = \begin{cases} (m-1)\varepsilon_1 + (m-2)\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{m-1} + 0\varepsilon_m & (n = 2m), \\ (m-1/2)\varepsilon_1 + (m-3/2)\varepsilon_2 + \cdots + (1/2)\varepsilon_m & (n = 2m+1) \end{cases}$$

である. つまり $\tilde{\natural}_n$ の前半半分は, ちょうど ρ における ε_j の係数と一致している. また, $F_{ii} = -F_{n+1-i, n+1-i}$ に注意すると,

$$\tilde{\natural}_n = (\rho(F_{11}), \rho(F_{22}), \ldots, \rho(F_{nn}))$$

とも表せる.

A 型の場合も振り返ってみると, $\{E_{11},\dots,E_{nn}\}$ の双対基底として, $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m\}$ をとると, $\rho\equiv(n-1)\varepsilon_1+(n-2)\varepsilon_2+\cdots+0\varepsilon_n \pmod{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n}$ であるから, やはり ρ と対角シフトが対応している.

しかし, 直交リー代数を交代行列で実現した場合は, ρ と対角シフトは対応していない. □

証明は同じようには行かないのであるが, 定理 5.2 の主張自体は, §3 や §4 と非常に類似している. さらに, 小行列を用いた中心元の構成や, 普遍包絡環の中心の生成系についても類似の命題が成立する.

$C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u+v)$ を v の factorial power で展開した係数として, $1\le d\le n$ に対して $C_d^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ を次のように定める:

$$C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u+v)=\sum_{d=0}^{n}v^{(d)}C_{n-d}^{\mathfrak{o}(S_n)}(u+d/2).$$

定め方より, $C_d^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ は $U(\mathfrak{o}(S_n))$ の中心に属する.

注意 5.5. 実際に $C_d^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ は $\mathbf{F}$ の小行列を用いて表すことが出来るが, 記号の準備が必要である. 対角シフトを記述するために新たに $\tilde{\mathbf{F}}$ を用意する:

$$\tilde{\mathbf{F}}=\begin{cases}\mathbf{F}+\begin{pmatrix}0_m & \\ & I_m\end{pmatrix} & (n=2m),\\[2ex] \mathbf{F}+\begin{pmatrix}0_m & & \\ & 1/2 & \\ & & I_m\end{pmatrix} & (n=2m+1).\end{cases}$$

ここで 0_m は m 次の零行列である. すると,

$$C_d^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)=\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \sharp I=d}}\det(\tilde{\mathbf{F}}_I+uI_d+\mathrm{diag}(d/2-1,d/2-2,\dots,d/2-d))$$

である. $d=n$ の時この表示は, 定理 5.2 の $C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ の定義と一致している.

差分作用素 Δ を用いて $C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u+v)$ を v の factorial power で展開することによりこの表示は得られる. □

これらの中心元を用いて, 次のように $U(\mathfrak{o}(S_n))$ の中心の生成系を構成できることがわかる.

命題 5.6. u を複素数とする. $n=2m+1$ のとき, $U(\mathfrak{o}(S_n))$ の中心は,

$$C_2^{\mathfrak{o}(S_n)}(u),C_4^{\mathfrak{o}(S_n)}(u),\dots,C_{2m}^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$$

で $\mathbf{C}$ 上生成される m 変数多項式環に同型である．また $n=2m$ のとき, $U(\mathfrak{o}(S_n))$ の中心は,

$$C_2^{\mathfrak{o}(S_n)}(u), C_4^{\mathfrak{o}(S_n)}(u), \ldots, C_{2m-2}^{\mathfrak{o}(S_n)}(u), \mathrm{Pf}(\mathbf{F}S_n)$$

で $\mathbf{C}$ 上生成される m 変数多項式環に同型である．ただし $\mathbf{F}S_n$ は $2m\times 2m$ 行列の積であり, 交代行列であることに注意しておく． □

注意 5.7. $d=2k+1$ の場合は, $C_{2k+1}^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ は $C_2^{\mathfrak{o}(S_n)}(u), \ldots, C_{2k}^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ で表すことができる．また, $C_{2k+1}^{\mathfrak{o}(S_n)}(0)=0$ である． □

6　C 型

前節の中心元の構成に見られる自然さは次のとおりである: 非退化対称行列 S_n をとったとき,

(a) F_{ij} を S_n を用いて定義できる (後述).

(b) その F_{ij} を成分とする行列 $\mathbf{F}$ は, 群の作用で不変である (式 (5.1)).

(c) $\mathbf{F}$ に ρ と対応する対角シフトを入れて行列式をとると, 中心元が構成される.

この節では, 斜交リー代数において上の意味で自然な構成を試みても中心元が得られないようであることを解説する.

斜交リー代数は, $2m$ 次元ベクトル空間の非退化交代双 1 次形式をひとつとり, それを不変にする $\mathfrak{gl}_{2m}$ の部分代数として得られる．S'_{2m} を, ある $2m\times 2m$ 非退化交代行列として,

$$\mathfrak{sp}(S'_{2m}) = \{X\in\mathfrak{gl}_{2m}\ ;\ {}^tXS'_{2m}+S'_{2m}X=0\}$$

とおく．$\mathfrak{sp}(S'_{2m})$ はリー代数として $\mathfrak{sp}_m$ に同型である．このとき,

$$G_{ij} = E_{ij} - S'^{-1}_{2m}E_{ji}S'_{2m}$$

と定めると, $\mathfrak{sp}(S'_{2m})$ に属することが簡単な計算でわかる．G_{ij} を成分として, 行列 $\mathbf{G}$ を

$$\mathbf{G} = (G_{ij})_{1\le i,j\le 2m} \in \mathrm{Mat}_{2m}(\mathfrak{sp}(S'_{2m}))$$

と定める．$\mathfrak{sp}(S'_{2m})$ に対応するリー群は,

$$Sp(S'_{2m}) = \{g\in GL(2m;\mathbf{C})\ ;\ {}^tgS'_{2m}g=S'_{2m}\}$$

であり, $\mathbf{G}$ は

$${}^tg^{-1}(gG_{ij}g^{-1})\,{}^tg = \mathbf{G} \qquad (g\in Sp(S'_{2m})) \tag{6.1}$$

という不変性を持つ.

注意 6.1. S'_{2m} の代わりに非退化対称行列 S_n を用いると, 前節の F_{ij} が得られる. 一般に, 交代行列 S'_{2m} の代わりに任意の非退化な対称行列または交代行列 S をとると,

(a) G_{ij} は, S を不変にするリー代数 $\mathfrak{o}(S)$ または $\mathfrak{sp}(S)$ に属する.

(b) その G_{ij} を成分とする行列 $\mathbf{G}$ は, 群 $O(S)$ または $Sp(S)$ の作用で不変である.

ことが示される. $\square$

$\mathbf{G}$ が不変性 (6.1) を持つので, double-determinant を用いた中心元が構成できる. 証明も前節までと全く同じである. 次の命題では S'_{2m} は任意の非退化交代行列でよいが, 注意 4.2 や命題 5.1 直前における '実現によらず' というのはこの意味である.

命題 6.2. S'_{2m} を $2m \times 2m$ 非退化交代行列とすると, $u_1, \ldots, u_{2m} \in \mathbf{C}$ に対して, 次の元は $U(\mathfrak{sp}(S'_{2m}))$ の中心に属する:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{G}; u_1, \ldots, u_{2m}) \qquad\qquad \text{(Itoh-Umeda [IU01]).}$$

$\square$

さて, 実現への依存が強い列-行列式による中心元の構成を考えるため,

$$S'_{2m} = \begin{pmatrix} 0_m & S_m \\ -S_m & 0_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 1 \\ & & & & \iddots & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & \iddots & & & & \\ -1 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

とおく. この場合は,

$$\begin{aligned} G_{ij} &= E_{ij} - \theta_{ij} E_{2m+1-j,2m+1-i}, \\ \theta_{ij} &= \begin{cases} 1 & (1 \le i, j \le m \text{ または } m < i, j \le 2m) \\ -1 & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

である. $\mathfrak{sp}(S'_{2m})$ の Cartan 部分代数として, $\mathfrak{h} = \mathbf{C}G_{11} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}G_{mm}$ をとり, $\mathfrak{h}$ の基底 $\{G_{11}, \ldots, G_{mm}\}$ の双対基底を $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$ とすると, $\rho = m\varepsilon_1 + (m-1)\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m$ である. 列-行列式を用いた自然に思える中心元の構成は,

$$\det(\mathbf{G} + \mathrm{diag}(m, m-1, \ldots, 1; -1, -2, \ldots, -m))$$

であるが, この元は $U(\mathfrak{sp}(S'_{2m}))$ の中心には属さない.

注意 6.3. 計算機によるランクの低い場合の計算結果からわかることがいくつかある: 上の構成で, 対角シフトを他のどのようなものに変えても中心元は得られないようである. また, S'_{2m} の代わりに, $\left(\begin{smallmatrix} 0_m & I_m \\ -I_m & 0_m \end{smallmatrix}\right)$ を用いても, やはり中心元は得られないように見える.

S'_{2m} の代わりに非退化対称行列をとり, 直交リー代数の実現を考えた場合にも, 計算結果からわかることがらがいくつかある: S'_{2m} のかわりに,

$$\begin{pmatrix} 0_m & I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0_m & \begin{matrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_m \end{matrix} & 0_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} & & s_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ s_m & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & s_m \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ s_1 & & \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

を用いても, 前節と同じ対角シフト $\tilde{\natural}_{2m}$ で中心元の構成ができる. また S'_{2m} の代わりに, $\mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)$ を用いると, §3 や §4 と同じ対角シフト $(n-1, n-2, \ldots, 0)$ で中心元が構成できる. $\square$

以上のように C 型での列-行列式を用いた中心元の構成はできていない. 単に列-行列式と対角シフトを用いるだけでは構成できないようにも感じる. しかし別の行列式型の中心元の構成がなされている (今のところ double ではない行列式型の中心元はこれのみと思われる).

注意 6.4. Twisted Yangian における Sklyanin determinant を用いて, Molev は BD 型, C 型の中心元を同時に構成している [Mol95]. $\square$

参考文献

[Cap90] A. Capelli, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.

[HU91] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), no. 3, 565–619.

[IU01] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, Compositio Math. **127** (2001), no. 3, 333–359.

[Mol95] A. Molev, *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995), no. 2, 923–943.