Alternating sign matrix と A 型 Coxeter 群の Bruhat order

難波　正幸
(名古屋大学大学院多元数理科学研究科)
e-mail : m00012h@math.nagoya-u.ac.jp

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が n 次 **Alternating sign matrix**(ASM) と呼ばれるのは以下の条件件を満たすときにいう.

(1) $a_{ij} \in \{0,\ 1,\ -1\}$.

(2) $1 \leq q \leq n$ に対して, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{iq} = 1$.

(3) $1 \leq p \leq n$ に対して, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{pj} = 1$.

(4) 各列・各行の 0 でない成分は, 1 で始まり, 1 と -1 が交互に現れる.

また,

$$\mathcal{A}_n = \{n \text{ 次 ASM 全体 }\}$$

とする.

例えば, n 次置換行列全体 $\mathfrak{S}_n$ は, n 次 ASM であり,

$$\mathcal{A}_3 = \mathfrak{S}_3 \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

である. したがって, n 次 ASM は置換行列の拡張と捉えることができる.

Coxeter 群は Weyl 群の拡張概念といえ, 次のように定義される :

群 W とその生成系 S との組 (W, S) が **Coxeter 系**と呼ばれるのは, W が次の生成関係のみで記述できるときにいう.

(a) 任意の $s \in S$ に対して, $s^2 = e$. (e は W の単位元)

(b) 相異なる S の 2 元 s, s' に対して, $m(s, s') \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ が存在して, $(ss')^{m(s,s')} = e$ となる.

ただし, $\mathbb{N}$ は自然数全体とし, $m(s, s') = \infty$ は, 積 ss' が何乗しても単位元とならないことを意味するものとする.

Coxeter 群上の半順序として, Bruhat order と呼ばれるものが, 次のように定義される :

$$w \leq w' \overset{def}{\Longleftrightarrow} w' = s_1 \cdots s_r : \text{reduced expression}^{1} \text{に対して,}$$
$$w = s_{i_1} \cdots s_{i_t}\ (1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq r) \text{ と書ける.}$$

A 型 Coxeter 群は n 次対称群 (n 次置換行列のなす群) と同型であるが, その Bruhat order は組み合わせ論的に書くことができることが知られている. 本講演では, その組合せ論的な記述を紹介し, Bruhat order を半順序とする半順序集合 A 型 Coxeter 群を含むような最小の complete lattice の組合せ論的な記述が n 次 ASM で与えられることを示す.

[1]すなわち, w' の S の元の積による表示において最短なもの.