Lagrangian minimal surfaces in $S^2 \times S^2$

水津　薫　(島根大学大学院総合理工学研究科Ｄ２)

S^2 を $\mathbf{R}^3$ からの誘導計量を持つ Riemann 球面とし、J を複素構造とする。この直積 $S^2 \times S^2$ は複素構造 (J, J) により複素 2 次元の Kähler 多様体となる。$S^2 \times S^2$ 内の Lagrangian surface について、次の例がある：(i) S^2 内の２つの曲線 γ_1, γ_2 を product immersion で埋め込んだもの。この例で特に極小となるのは、γ_i $(i = 1, 2)$ がともに大円であるときに限られる。(ii) S^2 を複素射影直線 CP^1 と同一視し、CP^1 の元 z に対して、z とその複素共役 $\bar{z}$ のペアを対応させることにより、$S^2 \times S^2$ 内の (全測地的) Lagrangian surface ができる。

$S^2 \times S^2$ の Lagrangian surface M^2 の存在性や合同性を考える上で、$S^2 \times S^2$ 上の概積構造が重要な役割を果たす。向け付けられた 2 次元 Riemann 多様体 M^2 から $S^2 \times S^2$ への Lagrangian immersion x に対し、概積構造に関する**角度関数** $\varphi : M^2 \to [-\pi/4, \pi/4]$ を導入する。これは $\varphi \equiv 0$ ならば x は product immersion となり（例 (i)）、$\varphi \equiv \pm\pi/4$ ならば x は全測地的となる (例 (ii)) ような関数である。このとき複素構造 $(J, -J)$ に関して M^2 の Kähler 角度は $\pi/2 - 2\varphi$ と表される。

$S^2 \times S^2$ の Lagrangian surface の合同定理として、以下を得る。

Theorem 1. 向き付けられた 2 次元連結多様体 M^2 に対し $x^1, x^2 : M^2 \to S^2 \times S^2$ を *Lagrangian immersion* とし、$\sigma^i (i = 1, 2)$ をそれぞれ x^i の第二基本形式とする。$\varphi^i : M^2 \to (-\pi/4, \pi/4)$ を各 x^i の角度関数とし、M^2 上の $(0, 3)$ テンソル場 T^i を $T^i(X, Y, Z) = \langle \sigma^i(X, Y), (J, J)Z \rangle$ により定義する。このとき $x^1(M^2)$ と $x^2(M^2)$ が *isometry* $g \in SO(3) \times SO(3)$ で移り合う為の必要十分条件は、$\varphi^1 = \varphi^2$ *and* $T^1 = T^2$。

また、2 次元 Riemann 多様体から $S^2 \times S^2$ への Lagrangian minimal immersion が存在する為の条件として、以下の結果が得られた。

Theorem 2. M^2 を向け付けられた 2 次元単連結 *Riemann* 多様体に対し、M^2 上の関数 $\varphi : M^2 \to (-\pi/4, \pi/4)$ が存在して、２つの方程式

$$K = (\sin^2 2\varphi)/2 - 2\|\operatorname{grad}\varphi\|^2,$$
$$\triangle\varphi + 2\|\operatorname{grad}\varphi\|^2 \tan 2\varphi = -\sin 4\varphi/4$$

を満たしているとする。このとき M^2 から $S^2 \times S^2$ への *Lagrangian minimal immersion* x が存在し、φ は x の角度関数となる。