Gotzmann monomial idealについて

村井　聡　　　(大阪大学大学院情報科学研究科)

体 K 上の n 変数多項式環 $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ の斉次イデアル $I = \oplus_{d=0}^{\infty} I_d$ に対し、R/I の d 次のヒルベルト関数を $H(R/I, d)$ とする。つまり $H(R/I, d) = \dim_K R/I_d$ である。次数 d の単項式全体の集合を M^d、部分集合 $V \subset M^d$ に対し $|V|$ を V の要素の数とする。

任意の正の整数 n と h に対し、h は n 次 Macaulay 表示と呼ばれる以下のような一意的な表示を持つ。

$$h = \binom{h(n)+n}{n} + \binom{h(n-1)+n-1}{n-1} + \ldots + \binom{h(i)+i}{i}$$

但し $h(n) \geq h(n-1) \geq \ldots \geq h(i) \geq 0$。他方、$i \geq 2$ なる n 次 Macaulay 表示を持つ h を n-jumping であると言う。また n 次 Macaulay 表示に対し、$h^{<+n>}$ を次で定める。

$$h^{<+n>} = \binom{h(n)+n+1}{n+1} + \binom{h(n-1)+n}{n} + \ldots + \binom{h(i)+i+1}{i+1}$$

Macaulayの結果により $H(R/I, d)^{<+d>} \leq H(R/I, d+1)$ である事が知られており、ここではMacaulayの不等式を満たすような I_d を考える事を目的とする。単項式の集合 $V \subset M^d$ が Gotzmann 集合であるとは、V で生成されるイデアル $I \subset R$ が $H(R/I, d)^{<+d>} = H(R/I, d+1)$ を満たす時に言う。また、このイデアルを Gotzmann 単項式イデアルと呼ぶ。

R の単項式 ${x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2}\ldots{x_n}^{a_n}$ が辞書式順序で ${x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2}\ldots{x_n}^{b_n}$ より大きいとは、$(a_1-b_1, a_2-b_2, \ldots, a_n-b_n)$ の最も左にある 0 でない成分が正である時に言う。次数 d、変数 n 個で辞書式順序で大きい単項式を順に a 個取った集合を $Lex(n, d, a)$ と書き lexsegment set と呼ぶ。lexsegment set は Gotzmann 集合である事が知られているが逆は正しくない。

第一の定理は $gcd(V) = 1$ を仮定した時に $|V| = a$ なる Gotzmann 集合が lexsegment set しかないような a を見つけるものである。今、V と V' を次数 d の単項式の集合とする。変数 $x_1, \ldots, x_n$ の入れ替えによって V を V' にできる時、$V \sim V'$ と書く。

定理 1. 正の整数 a の $(n-1)$ 次 Macaulay 表示を $a = \sum_{j=p}^{n-1} \binom{a(j)+j}{j}$ であるとする。次は同値。
(i) $a(n-1) = a(p)$。
(ii) $|V| = a$ かつ $gcd(V) = 1$ を満たす任意の Gotzmann 集合 V に対し $V \sim Lex(n, d, a)$。ここで $V \subset M^d$ である。

第二の定理は $|V|$ が $(n-1)$-jumping である時の Gotzmann 集合の分類である。

定理 2. 集合 V を次数 d の Gotzmann 集合で、$|V| = \sum_{j=p}^{n-1} \binom{a(j)+j}{j}$ を $(n-1)$ 次 Macaulay 表示とする。$|V|$ が $(n-1)$-jumping かつ $p < n-1$ なら、各 $p \leq i \leq n-1$ について次数 $a(i+1) - a(i)$ の単項式 $u_i \in K[x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}]$ を適当に選んで、

$$V \sim \bigcup_{j=p}^{n-1} \left(\prod_{i=j}^{n-1} u_i\right) x_{j+1} M^{a(j)}$$

とできる。但し $a(n) = d-1$ とする。