Chebyshev polynomial and subword order

冨江　雅也

筑波大学大学院数理物質科学研究科博士後期課程一年

P を $poset$ とし、P^* を P から生成される $finite\ word$ 全体に $subword\ order$ をいれて再び $poset$ と見なしたものとする。そのとき P^* のメビウス関数について考える。まず最も簡単な場合即ち P が単なる有限集合のときは Anders.Bjorner 氏によって計算された。その後 Bruce.Sagan 氏はそこで用いられた $sign-reversing\ involution$ という方法を発展させより一般の時、P が $rooted\ forest$ の場合にメビウス関数を具体的に計算する手立てを与えた。（Theorem.1）

Theorem 1
P を $rooted\ forest$ とする。　このとき P^* におけるメビウス関数は
$\mu(u,v) = \Sigma_{\eta_u}(-1)^{d(\eta)}$
となる。　但し η_u は $normal\ embedding$ 全体を動くものとする。

そうすると次は P が $non\ rooted\ forest$ の場合にメビウス関数の値を計算するのが自然な流れである。そして $non\ rooted\ forest$ の最も簡単な具体例は以下のようなものである。
$P := \{c, a_1, \cdots a_s\ | s \in \mathbb{N}_{\geq 2},\ \ a_i < c,\ 1 \leq \forall i \leq s\}$
またこのような $poset$ から定まるメビウス関数に関して以下のことが予想されていた。

Conjecture 1
$0 \leq m \leq n, s = 2$ としたとき、$\mu(a_1^m, c^n)$ は第一種 $Chebyshev$ 多項式 $T_{m+n}(X)$ における X^{n-m} の係数となっているであろう。

（第一種 Chebyshev 多項式とは $T_n(cos\theta) = cosn\theta$ で定まる多項式のことである。）
今回この予想に関して以下の定理を得た。まず Chebyshev 多項式の一般化と考えられる以下の式を定義する。

Definition 1
$n, s \in \mathbb{N}$ としたとき、以下の条件を満たすものとして多項式 $T_n^s(X)$ を定義する。
(1)　$T_0^s(X) = 1,\ T_1^s(X) = (s-1)X$
(2)　$T_{k+2}^s(X) + T_k^s(X) = sX \cdot T_{k+1}^s(X)$
とくに $s = 2$ のときこれは第一種 $Chebychev$ の多項式になっている。

Theorem 2
$0 \leq m \leq n$ としたとき、$\mu(a_1^m, c^n)$ は多項式 $T_{m+n}^s(X)$ における X^{n-m} の係数となっている。