Poset について

冨江　雅也

筑波大学数理物質科学研究科D２

1　Word と order

Section １では Word と subword order, generalized subword order について述べる。これは筆者が若手会で発表した内容である。

A を文字の集合とし A^* を A から生成される有限語の集合とする。このとき subword order を以下のように定義する。

Definition 1 ([1])

$a_1 \cdots a_r,\ b_1 \cdots b_s \in A^*$ とする。このとき

$a_1 \cdots a_r, \leq_s b_1 \cdots b_s$

$\Longleftrightarrow_{def}$

$\exists i_1 < \cdots < \exists i_r\ s.t\ a_1 = b_{i_1}, \cdots a_r = b_{i_r}.$

そして subword order のメビウス関数は以下のように計算できる。

Theorem 1 ([1])

$\mu(u,w) = (-1)^{|w|-|u|} < u,w >.$　　ここで $< u,w >$ は u,v から決まる *normal embedding* の個数。

P を *poset* とし P^* を P から生成される有限語の集合とする。このとき generalized subword order を以下のように定義する。

Definition 2 ([4])

$p_1 \cdots p_r,\ q_1 \cdots q_s \in A^*$ とする。

$p_1 \cdots p_r, \leq_{ge} q_1 \cdots q_s$

$\Longleftrightarrow_{def}$

$\exists i_1 < \cdots < \exists i_r\ s.t\ p_1 \leq q_{i_1}, \cdots p_r \leq q_{i_r}.$

generalized subword order から定まるメビウス関数は P が rooted forest のときは計算されている。

Theorem 2 ([4])

P が $rooted\ forest$ のとき $u \leq w \in P^*$ に対して

$\mu(u,w) = \Sigma_{\eta_u} (-1)^{d(\eta_{u,w})}.$　　　ただし $\eta_{u,w}$ は u,v から定まる *normal embedding* とする。

そして non rooted forest の場合に関しては $P = \{a,\ b,\ c \mid a < c,\ b < c\}$ のとき以下のことが予想されていた。

Conjecture 1 ([4])
$0 \le i \le j$ としたとき $\mu(a^i, c^j)$ は $T_{i+j}(X)$ における X^{j-i} の係数になるであろう。
ここで $T_m(X)$ は第一種 *Chebyshev* 多項式。即ち $T_m(cos\theta) = cosm\theta.$

今回上記の予想に関して以下の結果を得た。まず Chebyshev 多項式の一般化〔？〕と思われる式を定義する。

Definition 3
$s\ (\ge 2),\ m \in \mathbb{N}$ とする。　このとき T_m^s を以下で特徴付けられる多項式とする。($s=2$ のときは *Chebyshev* 多項式となる。)
（１）　$T_0^s(X) = 1, \quad T_1^s(X) = (s-1)X$
（２）　$T_m^s(X) + T_{m+2}^s(X) = sX \cdot T_{m+1}^s(X)$

この式を用いて $P_s = \{a_1, \cdots a_s,\ c \mid a_i < c, for\ i = 1, \cdots r\}$ のメビウス関数を記述した。

Theorem 3
$s(\ge 2), 0 \le m \le n$,$\{a^m\} \in \{a_{i_1} \cdots a_{i_m} \mid i_1, \cdots i_m \in \{1, \cdots s\}\}$ とする。このとき $\mu(\{a^m\}, c^n)$ は $T_{m+n}^s(X)$ における X^{n-m} の係数になる。

2　Phillip-Hall の定理の代数的証明

Section 2 ではメビウス関数に関する Phillip-Hall の定理を接合環を用いて証明する。

Theorem 4 (Phillip-Hall)
$x \le y \in P$ に対してメビウス関数は以下のように書ける。
$\mu([x,y]) = \Sigma_{0 \le i}(-1)^i P_i$　　ここで $P_i := \sharp\{\ (x_0, x_1 \cdots x_i) \mid\ x = x_0 < x_1 < \cdots < x_i = y\ \}$

Definition 4 ([5])
P を *locally-finite-poset* とし K を体とする。いま形式的なベクトル空間 $A(P) := Span_K\{\ [x,y] \mid x \le y \in P\ \}$ に対して積を以下のように定義する。
$[x,y] \cdot [z,w] := \delta_{yz}[x,w]$
このとき $A(P)$ は K 代数になる。これを接合環（*incidence-algebra*）という。単位元は $\Sigma_{x \in P}[x,x]$ となる

Exercise 1
$A(P)$ が K 代数になることをチェックせよ。また P が有限 *poset* であるとき $A(P)$ は有限サイズの行列で表現できることを示せ。

つぎに接合環の双対代数を定義する。

Definition 5 ([5])
P を *locally-finite-poset* とし K を体とする。集合
$Hom(A(P), K) := \{f \mid f:\ A(P) \longmapsto K,\ K-linear\}$
に対して積を以下のように定義する。
$f * g([x,y]) := \Sigma_{x \le z \le y} f([x,z]) \cdot g([z,y]),\ for\ x \le y \in P.$
このとき $Hom(A(P), K)$ は K 代数になる。そして写像 $e\ :\ [x,y] \mapsto \delta_{xy}$ が単位元となる。

Exercise 2
$Hom(A(P),K)$ が K 代数になることをチェックせよ。

次に $Map(P,K) := \{\psi \mid \psi : P \longmapsto K\ \}$ に対して $Hom(A(P),K)$ を作用させる。

Proposition 1 ([5])
$\psi \in Map(P,K),\ f \in Hom(A(P),K)$ とする。このとき $(\psi)f(x) := \Sigma_{y\leq x} f([y,x])\psi(y)$ により $Map(P,K)$ は右 $Hom(A(P),K)$ 加群になる。

Proof
$\psi \in Map(P,K),\ x \in P$ および $f,g \in Hom(A(P),K)$ に対して $((\psi)f)g(x) = (\psi)f * g(x)$ を示せばよい。
$((\psi)f)g(x) = \Sigma_{y\leq x} g([y,x])(\psi)f(y) = \Sigma_{y\leq x}\Sigma_{z\leq y} g([y,x])f([z,y])\psi(z) = \Sigma_{z\leq y\leq x} f([z,y])g([y,x])\psi(z)$
$= \Sigma_{z\leq x} f * g([z,x])\psi(z)\ (\psi)f * g(x).$ □
いま $\zeta, \mu \in Hom(A(P),K)$ を以下のように定める。
$\zeta([x,y]) := 1,\ \forall x \leq y \in P.$
$\mu([x,x]) := 1, \forall x \in P,\ \mu([y,z]) := -\Sigma_{y\leq w<z}\mu(y,w)\ \forall y < z\ .$
〔μ についてはメビウス関数の定義そのものである。〕

Notation 1
メビウス関数の定義を $\mu([x,x]) := 1, \forall x \in P,\ \mu([y,z]) := -\Sigma_{y<w\leq z}\mu(w,z)\ \forall y < z$ とすることもあるが前述の定義と同値である。一方 ζ をゼータ関数という。

Proposition 2 ([5])
$k \in \mathbb{N},\ x \leq y \in P$ に対して
$\zeta^k([x,y]) = \sharp\{(p_0,p_1,\cdots p_k) \mid x = p_0 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_k = y\ \ \}$
$(\zeta - 1)^k([x,y]) = \sharp\{\ (p_0,p_1,\cdots p_k) \mid x = p_0 < p_1 < \cdots < p_k = y\ \ \}$
となる。
また十分大きな $k \in \mathbb{N}$ に対して $(\zeta - 1)^k([x,y]) = 0$ が成り立つ。

Proposition 3 ([5])
ζ は $Hom(A(P),K)$ において μ の逆元になる。即ち $\zeta * \mu = 1,\ \ \mu * \zeta = 1$。

Proof
$x \leq y \in P$ に対して $\zeta * \mu([x,y]) = \Sigma_{x\leq z\leq y}\zeta([x,z])\mu([z,y]) = \Sigma_{x\leq z\leq y}\mu([z,y]) = \delta_{xy}$
よって $\zeta * \mu = 1.\ \mu * \zeta = 1$ も同様。□

Proposition 4 ([5])
ζ の逆元は一意に存在する。　即ち μ は ζ の逆元であり、$f \in Hom(A(P),K)$ に対して $f * \zeta = 0$ ならば $f = 0$。

Proof
後半部のみ示す。
$f * \zeta = 0 \Longleftrightarrow \Sigma_{x\leq z\leq y} f([x,z])\zeta([z,y]) = 0,\quad \forall x \leq y \in P \Longleftrightarrow \Sigma_{x\leq z\leq y} f([x,z]) = 0$
あとは x と y の距離に関する帰納法より従う。□

Theorem 5 (Phillip-Hall)
$x \le y \in P$ に対してメビウス関数は以下のように書ける。
$\mu([x,y]) = \Sigma_{0\le i}(-1)^i P_i$ 　　ここで $P_i := \sharp\{\ (x_0, x_1 \cdots x_i) \mid\ x = x_0 < x_1 < \cdots < x_i = y\ \}$。

Proof
$\mu * \zeta([x,y]) = \delta_{xy} \Longleftrightarrow \mu([x,y]) = 1 * (\zeta)^{-1}([x,y]) = 1 * (1 + (\zeta - 1))^{-1}([x,y])$
$\Longleftrightarrow \mu([x,y]) = \Sigma_{0\le i}(-1)^i(\zeta - 1)^i([x,y])$
$\Longleftrightarrow \mu([x,y]) = \Sigma_{0\le i}(-1)^i P_i$ □
次に poset におけるメビウス反転公式を示す。

Theorem 6 ([5])
$\psi, \phi \in Map(P,K), x \in P$ に対して、$\psi(x) = \Sigma_{y\le x}\phi(y) \Longleftrightarrow \phi(x) = \Sigma_{y\le x}\mu([y,x])\psi(y)$。

Proof
これは $Map(P,K)$ を $Hom(A(P),K)$ 加群とみたときに $(\psi)\mu = \phi \Longleftrightarrow (\phi)\zeta = \psi$ となることより従う。□

3 Subword order, composition order, symmetric group...

Section 3 では subword order$\{a,b\}^*$ と composition order そして対称群の間に成り立つ興味深い対応について述べる。詳しくは [3] を参照のこと。

$\alpha = (a_1, a_2, \cdots a_r)$ が n の composition であるとは $\Sigma_{i=1}^r a_i = n,\ a_i \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ をなるときをいう。そして n の composition 全体を $\Sigma(n)$ と書く。また $\Sigma := \biguplus \Sigma(n)$ とおく。たとえば $\Sigma(3) = \{\ (111), (12), (21), (3)\ \}$ である。

Exercise 3
$\sharp\Sigma(n) = 2^{n-1}$ を示せ。

次に Σ に order を入れて poset にする。

Definition 6
$(a_1, \cdots a_k),\ (b_1 \cdots bl) \in \Sigma$ とする。
$(a_1, \cdots a_k) \prec (b_1 \cdots b_l) \Longleftrightarrow_{def} \quad (b_1 \cdots b_l) = (a_1, \cdots a_{i-1}, t, a_i + 1 - t, a_{i+1}, \cdots a_k)$ *for some i, and* $1 \le t \le a_i$.

注意　poset の元 a, b に対して $a \prec b$ とは $a < c < b$ なる c が存在しないときをいう。
いま Σ と $\{a,b\}$ の間に順序同型を構成する。
$\Psi:\ \{a,b\} \Longrightarrow\ \{1,+1\}$
$\Psi(c_1c_2\cdots c_r) \longmapsto\ 1\psi(c_1)\psi(c_2)\cdots\psi(c_r)$
但し　$\psi(a) = +1,\ \psi(b) = 1$
$\Phi:\ \{1,+1\} \Longrightarrow \Sigma$
$$\Phi(\underbrace{1\cdots 1}_{i_1 times} + \underbrace{1\cdots 1}_{i_2 times}\cdots + \underbrace{1\cdots 1}_{i_k times}) = (i_1, i_2 \cdots i_k)$$
但し　$i_1, i_k \ge 1,\ i_{\ge 2} \ge 0$
とおく。

Example 1
$\Phi\circ\Psi(aababab b) = 1+1+11+11+111 \longmapsto (1,1,2,2,3)$.
$\Phi\circ\Psi(baabbabbb) = 11+1+111+1111 \longmapsto (2,1,3,4)$.

Exercise 4
$\Phi\circ\Psi$ が順序同型であることを確かめよ。

つぎに対称群の元と composition order における saturated chain の間に一対一対応をつける。
$w\in S_n$ を数列 $(w(1),w(2),\cdots w(n))$ と同一視して考える。

Definition 7
$w\in S_n$ としたとき w の *descent* $D(w)$ を以下のように定める。
$D(w)=\{i \mid w(i)>w(i+1)\}$.
対応する *descent composition* $C(w)=(\alpha_1,\cdots\alpha_k)\in\Sigma_n$ を
$D(w)=\{\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\cdots\alpha_1+\cdots\alpha_{k-1}\}$
となるように定める。

Example 2
$w=(2,4,3,1)$ とした時は $D(w)=\{2,3\},\ C(w)=(2,1,1)$ となる。

いま $w\in S_n$ を $\{1,\cdots i\}$ に制限したものを $w[i]\in S_i$ とし Σ_n において 1 を始点とする長さ $n-1$ の saturated chain の集合を Sat_n とする。

$$\mathfrak{M}:\ S_n \longrightarrow Sat_n$$
$$\mathfrak{M}(w)\longmapsto\{1=C(w[1])\prec C(w[2])\prec\cdots\prec C(w[n])\}.$$

Example 3
$w=(3,1,4,5,2)$ としたとき $w([1])=(1),\ w([2])=(1,2), w([3])=(3,1,2), w([4])=(3,1,4,2), w([5])=(3,1,4,5,2)$ となる。
そして $D(w[1])=\phi, D(w[2])=\phi, D(w[3])=\{1\}, D(w[4])=\{1,3\}, D(w[5])=\{1,4\}$ より $C(w[1])=\{1\}, C(w[2])=\{2\}, C(w[3])=\{1,2\}, C(w[4])=\{1,2,1\}, C(w[5])=\{1,3,1\}$ となる。明らかに $\{1\}\prec\{2\}\prec\{1,2\}\prec\{1,2,1\}\prec\{1,3,1\})$. よって $(C(w[1]),C(w[2]),C(w[3]),C(w[4]),C(w[5]))$ は *saturated-chain* になっている。

Exercise 5
$\mathfrak{M}$ が一対一対応になっていることを確かめよ。

以上をまとめると $\Phi\circ\Psi$ 及び $\mathfrak{M}$ という自然な写像によって $\{a,b\}$ と composition order、そして対称群が結ばれている。

Reference

[1] Björner, A. The Mobius function of factor order. Theoret. Comput. Sci. 117, 1-2 (1993) 91-98

[2] Björner, A. Sagan, B, E. Rationality of the Mobius function of the composition poset. Theoret. Comput. Sci. 359 (2006), no.1-3, 282-298.

[3] Björner, A. Stanley, R, P. An analogue for compositions. arXiv:math.CO/0508043.

[4] Sagan, B, E. Vatter, V. The Mobius function of the composition poset. J. Algebraic, Combin. 24 (2006), no.2,117-136.

[5] Stanley, R, P. Enumerative combinatorics. Vol. 1, vol. 49 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press Cambridge, 1997.