リーマン面に関する length multiplicity の分布

橋本康史* （九州大学）
e-mail: hasimoto@math.kyushu-u.ac.jp

1 Introduction

$\mathbb{H} := \{x+iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ を複素上半平面，Γ を $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ の体積が有限になるような $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群とする．そして，$\mathrm{Prim}(\Gamma)$ を Γ の素な双曲的共役類の集合，$N(\gamma)$ を $\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma)$ の固有値の大きい方の二乗とする．このとき，$\mathrm{Prim}(\Gamma)$ の元とリーマン面 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ 上の素な閉測地線との間には一対一対応があり，測地線の長さは $\log N(\gamma)$ であることがわかっている．なので，$\mathrm{Norm}(\Gamma) := \{N(\gamma) \mid \gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma)\}$，$m(N) := \{\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma) \mid N(\gamma) = N\}$ とおくと，$\mathrm{Norm}(\Gamma)$ を $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ 上の素測地線の長さの集合と同一視することができる．このような測地線の長さの集合は重複度も含めて length spectrum とよばれているので，$\{(N, m(N))\}_{N\in\mathrm{Norm}(\Gamma)}$ を length spectrum と同一視できる．

ここで，次のようなオイラー積で定義されるセルバーグゼータ関数を導入する．

$$\begin{aligned} Z_\Gamma(s) &:= \prod_{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - N(\gamma)^{-s-n}) \\ &= \prod_{N\in\mathrm{Norm}(\Gamma)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - N^{-s-n})^{m(N)} \quad \mathrm{Re}s > 1. \end{aligned}$$

セルバーグ跡公式を使うと，このゼータ関数が全複素平面に位数 2 の有理型関数として解析接続できることがわかる（[He] などを参照）．とくに，$\{0 < \mathrm{Re}s < 1\}$ 内の零点は高々有限個の実軸上の零点を除いて $\{0 < \mathrm{Re}s \le 1/2\}$ 内にあり，その個数は

$$\sum_{\substack{\sigma:\mathrm{zero} \\ 0<\mathrm{Re}\sigma<1 \\ 0<\mathrm{Im}\sigma<T}} 1 = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{4\pi} T^2 + \nu T \log T + O(T) \quad \text{as} \quad T \to \infty \tag{1.1}$$

と漸近的に評価される．ここで，ν は $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ のカスプの個数である．跡公式によって得られたセルバーグゼータ関数の解析性を使うと，素数定理の類似ともいえる素元定理（素弦

*九州大学大学院数理学研究院 COE 博士研究員

定理・素測地線定理）とよばれる次の漸近公式が得られる．

$$\pi_\Gamma(x) := \sum_{\substack{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)\\ N(\gamma)<x}} 1 = \mathrm{li}(x) + \sum_{1/2<c_j<1} \mathrm{li}(x^{c_j}) + O(x^{3/4}) \quad \text{as} \quad x\to\infty. \tag{1.2}$$

ここで，$\{c_j\}$ は高々有限個の $\{1/2 < \mathrm{Re}s < 1\}$ 内の実軸上にあるセルバーグゼータ関数の零点，$\mathrm{li}(x) := \int_2^x (\log t)^{-1} dt$ である．今，$\pi_\Gamma(x)$ は

$$\pi_\Gamma(x) = \sum_{\substack{N\in\mathrm{Norm}(\Gamma)\\ N<x}} m(N)$$

ともあらわされるので，素元定理は $m(N)$ の和に関する漸近公式であると考えることができる．本稿では，この length spectrum の重複度 $m(N)$ 自身の分布を具体的に調べ，それがどのような Γ の特徴づけを与えるかを明らかにすることを目的とする．

本論に入る前に，比較対象として，$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体 K に関するデデキントゼータ関数

$$\zeta_K(s) := \prod_{\mathfrak{p}:K\ \text{上の素イデアル}} (1-N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} \quad \mathrm{Re}s>1$$

について考えてみよう．ここで，$N(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}$ の K 上のノルムである．よく知られているように，$N(\mathfrak{p})$ は素数の冪になっているので（[高] 等を参照），$\zeta_K(s)$ は次のようにも表される．

$$\zeta_K(s) = \prod_{p^k} (1-p^{-ks})^{-m(p^k)} \quad \mathrm{Re}s>1.$$

ここで，$m(p^k) := \#\{\mathfrak{p} \mid N(\mathfrak{p}) = p^k\}$ であり，これが length spectrum の重複度 $m(N)$ に対応している．すると，簡単にわかるように $0 \le m(p^k) \le [K:\mathbb{Q}]$ なので，この場合に重複度分布を調べるのはあまり面白くない．しかしながら，リーマン面に関する length spectrum の場合，$m(N)$ は非有界であることが知られている（[Ra] を参照）ため，その詳しい分布・漸近的な挙動を調べることは興味深いと考える．

まず，一般的な Γ に対しては $m(N)$ が次のように評価されることがわかった．

Theorem 1.1. Γ を $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})<\infty$ なる $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群とする．このとき，任意の $\epsilon>0$ に対して次が成り立つ．

$$m(N) \ll N^{3/4} \quad \textit{as} \quad N\to\infty, \tag{1.3}$$

$$\pi_\Gamma^{(2)}(x) := \sum_{\substack{N\in\mathrm{Norm}(\Gamma)\\ N<x}} m(N)^2 \ll x^{5/3+\epsilon} \quad \textit{as} \quad x\to\infty. \tag{1.4}$$

ちなみに，この Theorem 1.1 を使うと，$k\ge3$ に対して，

$$\pi_\Gamma^{(k)}(x) := \sum_{\substack{N\in\mathrm{Norm}(\Gamma)\\ N<x}} m(N)^k \ll x^{\frac{3}{4}k+\frac{1}{6}+\epsilon}$$

が得られる．

さて，上の定理は一般の Γ に対する結果だが，もっと具体的に $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のときには Bogomolny-Leyvraz-Schmit [BLS] や Peter [Pe] によって，

$$\pi^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(x) \sim c^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \mathrm{li}_k(x^{3/2}) \quad \text{as} \quad x \to \infty \tag{1.5}$$

という詳しい漸近評価が得られている．ここで，$c^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ は正の定数である．本稿では，この拡張といえる次の定理を得た．

Theorem 1.2. Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して次が成り立つ．

$$N^{1/2-\epsilon} \ll m(N) \ll N^{1/2+\epsilon} \quad as \quad N \to \infty. \tag{1.6}$$

また，任意の $k \geq 2$ に対して定数 $c^{(k)}_{\Gamma} > 0$ が存在し，次が成り立つ．

$$\pi^{(k)}_{\Gamma}(x) \sim c^{(k)}_{\Gamma} \mathrm{li}_k(x^{\frac{k+1}{2}}) \quad as \quad x \to \infty. \tag{1.7}$$

ここで，$\mathrm{li}_k(x) := \int_2^x (\log t)^{-k} dt$ である．

なお，[BLS] や [Pe] の中では，$c^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ の具体的な表示が得られているが，残念ながら，Theorem 1.2 中の $c^{(k)}_{\Gamma}$ の具体的な表示は今のところ得られていない．

2 Theorem 1.1 の証明の概略

まず，自明に $m(N) \leq \pi^{(1)}_{\Gamma}(N+1) - \pi^{(1)}_{\Gamma}(N-1)$ なので，素元定理(1.2) より $m(N) \ll N^{3/4}$ が簡単に得られる．次に $\pi^{(2)}_{\Gamma}(x)$ を評価するため，いくつか記号と補題を準備しよう．

まず，$v \in C^{\infty}(\mathbb{R}_{>0})$ を任意の $x > 0$ に対して $0 \leq v(x) \leq 1$ で，

$$v(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x \leq 1), \\ 0 & (x \geq \min\{N \in \mathrm{Norm}(\Gamma)\} =: \hat{N}). \end{cases}$$

をみたす関数とする．すると，$w(s) := \int_0^{\infty} -v'(x) x^s dx$ は任意の $n \geq 1$ に対し，

$$w(s) = O\Big(|s|^{-n} e^{\max(\mathrm{Re} s, 0)}\Big) \quad \text{as} \quad |s| \to \infty, \tag{2.1}$$

をみたす．このとき，このような v と w を使って次のような明示公式が得られる．

Lemma 2.1. $X > 0$ を十分大きな実数とする．このとき，次が成り立つ．

$$\sum_{\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma), k \geq 1} \frac{\log N(\gamma)}{1 - N(\gamma)^{-k}} N(\gamma)^{-ks} v\Big(\frac{N(\gamma^k)}{X}\Big) = \sum_{\sigma:\ zero} \frac{X^{\sigma - s} - 1}{\sigma - s} w(\sigma - s).$$

Proof. まず，次の積分を計算しよう．

$$J(X,s) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}z=2}\frac{Z_\Gamma'(z+s)}{Z_\Gamma(z+s)}\frac{X^z-1}{z}w(z)dz.$$

すると，$Z_\Gamma(s)$ の対数微分の素元和としての表示を直接使って次のように計算できる．

$$\begin{aligned}&J(X,s)\\&=\sum_{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma),k\geq 1}\frac{\log N(\gamma)}{1-N(\gamma)^{-k}}N(\gamma)^{-ks}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}z=c}\Big\{\Big(\frac{X}{N(\gamma)^k}\Big)^z-N(\gamma)^{-kz}\Big\}\frac{w(z)}{z}dy\\&=\sum_{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma),k\geq 1}\frac{\log N(\gamma)}{1-N(\gamma)^{-k}}N(\gamma)^{-ks}\Big\{v\Big(\frac{N(\gamma)^k}{X}\Big)-v(N(\gamma)^k)\Big\}.\end{aligned}$$

なので，あとは v の定義から次が得られる．

$$J(X,s)=\sum_{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma),k\geq 1}\frac{\log N(\gamma)}{1-N(\gamma)^{-k}}N(\gamma)^{-ks}v\Big(\frac{N(\gamma)^k}{X}\Big). \tag{2.2}$$

一方で，留数定理を使うと次が得られる．

$$J(X,s)=\sum_{\sigma:\mathrm{zero}}\frac{X^{\sigma-s}-1}{\sigma-s}w(\sigma-s). \tag{2.3}$$

なので，あとは(2.2) と(2.3) を等式で結べばよい． □

簡単のため，Lemma 2.1 の公式を $G(s,X)=I(s,X)$ と記述する．そして，両辺の 2 乗積分を $\int_{iT}^{2iT}|*|^2ds$ を計算すると，次のような結果を得る．

Lemma 2.2. $T>0$ を十分大きな数とする．このとき，

$$\phi_u(X) := \sum_{N\in\mathrm{Norm}(\Gamma)}m(N)^2(\log N)^2N^u v\Big(\frac{N}{X}\Big)^2$$

に対して，次が成り立つ．

$$\int_T^{2T}|G(it,X)|^2dt = T\phi_0(X)+O\big(T\phi_{-1}(X)\big)+O(TX^{3/2})+O(X^2).$$

Proof. 積分を直接計算すると,

$$
\begin{aligned}
&\int_T^{2T} |G(it,X)|^2 dt \\
&= \sum_{\substack{\gamma_1,\gamma_2\in\mathrm{Prim}(\Gamma)\\ k_1,k_2\geq 1}} \frac{\log N(\gamma_1)\log N(\gamma_2)}{(1-N(\gamma_1)^{-k_1})(1-N(\gamma_2)^{-k_2})} v\Big(\frac{N(\gamma_1)^{k_1}}{X}\Big) v\Big(\frac{N(\gamma_2)^{k_2}}{X}\Big) \int_T^{2T} \Big(\frac{N(\gamma_2)^{k_2}}{N(\gamma_1)^{k_1}}\Big)^{it} dt \\
&= \sum_{\substack{\gamma_1,\gamma_2\in\mathrm{Prim}(\Gamma)\\ k_1,k_2\geq 1}} \log N(\gamma_1)\log N(\gamma_2)\Big(1+O\big(N(\gamma_1)^{-k_1}\big)+O\big(N(\gamma_2)^{-k_2}\big)\Big) \\
&\quad\times v\Big(\frac{N(\gamma_1)^{k_1}}{X}\Big) v\Big(\frac{N(\gamma_2)^{k_2}}{X}\Big) \int_T^{2T} \Big(\frac{N(\gamma_2)^{k_2}}{N(\gamma_1)^{k_1}}\Big)^{it} dt
\end{aligned}
$$

を得る．上の和を

$$
\sum_{\substack{\gamma_1,\gamma_2\in\mathrm{Prim}(\Gamma)\\ k_1,k_2\geq 1}} = \sum_{\substack{\gamma_1,\gamma_2\in\mathrm{Prim}(\Gamma)\\ N(\gamma_1)=N(\gamma_2)}} + \sum_{\substack{\gamma_1,\gamma_2\in\mathrm{Prim}(\Gamma)\\ \text{either } k\neq 1 \text{ or } k_2\neq 1\\ N(\gamma_1)^{k_1}=N(\gamma_2)^{k_2}}} + \sum_{\substack{\gamma_1,\gamma_2\in\mathrm{Prim}(\Gamma)\\ k\geq 1,,k_2\geq 1\\ N(\gamma_1)^{k_1}\neq N(\gamma_2)^{k_2}}} =: S_1+S_2+S_3
$$

と分割すると，まず S_1 は次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
S_1 =& T\sum_{N\in\mathrm{Norm}(\Gamma)} (\log N)^2\big(1+O(N^{-1})\big) v\Big(\frac{N}{X}\Big)^2 \sum_{\substack{\gamma_1,\gamma_2\in\mathrm{Prim}(\Gamma),\\ N(\gamma_1)=N(\gamma_2)=N}} 1 \\
=& T\sum_{N\in\mathrm{Norm}(\Gamma)} (\log N)^2\big(1+O(N^{-1})\big) v\Big(\frac{N}{X}\Big)^2 m(N)^2 = T\phi_0(X) + O\big(T\phi_{-1}(X)\big). \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

次に S_2 は

$$
S_2 \leq T\Bigg(\sum_{\substack{N(\gamma_1)^{k_1}<\hat{N}X\\ k_1>1}} \log N(\gamma_1)\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{N(\gamma_2)^{k_2}<\hat{N}X\\ k_2\geq 1}} \log N(\gamma_2)\Bigg)
$$

なので，素元定理(1.2) から，$S_2 = TO(X^{1/2})\times O(X) = O(TX^{3/2})$ を得る．

最後に S_3 を評価しなければいけないが，詳しい計算は少し煩雑になるので割愛し，結果として $S_3 = O(X^2)$ が得られることのみを述べておく．以上より，Lemma 2.2 が証明される． □

Lemma 2.3. $U>0$ を T に対して十分小さな数とする．このとき，任意の $n\geq 1$ に対して次が成り立つ．

$$
\int_T^{2T} |I(it,X)|^2 dt = O(T^{-2n+1}X^2) + O(T^{-n+3}X^{3/2}) + O(T^4U^{-n}X) + O(T^3UX).
$$

Proof. $w(s)$ の評価(2.1) から，$I(it,X)$ は次のように評価される．

$$I(it,X)=\sum_{\substack{\sigma:\text{zero}\\ \sigma=\alpha+i\beta\notin\mathbb{R}}} O\Big(X^{1/2}|1+i(\beta-t)|^{-n}\Big)+O(X|t|^{-n})=:I_1(t,X)+I_2(t,X).$$

この二乗積分を計算しなければならないが，まず，$\int_T^{2T}|I_2(t,X)|^2dt=O(X^2T^{-2n+1})$ は簡単にわかる．次に，

$$\begin{aligned}
&\int_T^{2T}\Big(I_1(t,X)\bar{I}_2(t,X)+\bar{I}_1(t,X)I_2(t,X)\Big)dt\\
=&\sum_{T/2<\beta<3T}X^{3/2}\int_T^{2T}O\Big(|t|^{-n}|1+i(\beta-t)|^{-n}\Big)dt\\
&+\sum_{\text{other }\sigma}X^{3/2}\int_T^{2T}O\Big(|t|^{-n}|1+i(\beta-t)|^{-n}\Big)dt\\
=&\sum_{T/2<\beta<3T}X^{3/2}O(T^{-n+1})+\sum_{\text{other }\sigma}X^{3/2}O(X\beta^{-n}T^{-n+1})=O(T^{-n+3}X^{3/2})
\end{aligned}\tag{2.5}$$

である．最後に，

$$\int_T^{2T}|I_1(t,X)|^2dt=\sum_{\substack{\sigma_1=\alpha_1+i\beta_1\\ \sigma_2=\alpha_2+i\beta_2}}\int_T^{2T}O\Big(X|1+i(\beta_1-t)|^{-n}|1-i(\beta_2-t)|^{-n}\Big)dt$$

を評価する．すると，定積分の部分は $O(X|c+i(\beta_1-\beta_2)|)$ なので，

$$\sum_{\beta_1,\beta_2}=\sum_{\substack{T/2<\beta_1,\beta_2<3T\\ |\beta_1-\beta_2|<U}}+\sum_{\substack{T/2<\beta_1,\beta_2<3T\\ |\beta_1-\beta_2|\geq U}}+\sum_{\text{other }\sigma}=:L_1+L_2+L_3.$$

と和の部分を分けると，$L_1=O(T^3UX)$, $L_2=O(T^4U^{-n}X)$, $L_3=(X)$ と評価できる．以上より Lemma 2.3 を得る． □

Theorem 1.1 の証明. Lemma 2.2 と 2.3 から，

$$\phi_0(X)=O(T^{-1}X^2)+O(X^{3/2})+O(T^{-n+2}X^{3/2})+O(T^3U^{-n}X)+O(T^2UX)$$

を得る．ここで，$U=T^{\frac{1}{n+1}}$，$T=X^{\frac{1}{3}}$ ととると，n を十分大きくとることで，$\phi_0(X)=O(X^{5/3+\epsilon})$ であることがわかる．なので，$\phi_u(X)$ の定義から，

$$\pi_\Gamma^{(2)}(X)\ll\sum_{N\in\mathrm{Norm}(\Gamma)}m(N)^2(\log N)^2v\Big(\frac{N}{X}\Big)^2\ll X^{5/3+\epsilon}$$

が成り立つことがわかる． □

3 Theorem 1.2 の証明の概略

Gauss [G] などを読んでもらえばわかるが，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の素な双曲類と原始的不定値二元二次形式との間には次のような 1 対 1 対応がある．

$$[a,b,c] := aX^2 + bXY + cY^2 \longmapsto \begin{pmatrix} \dfrac{t+bu}{2} & -cu \\ au & \dfrac{t-bu}{2} \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \Big(\gamma_{ij}\Big)_{1\le i,j\le 2} \longmapsto \Big[\frac{\gamma_{21}}{u_\gamma}, \frac{\gamma_{11}-\gamma_{22}}{u_\gamma}, \frac{-\gamma_{12}}{u_\gamma}\Big].$$

ここで，(t,u) は判別式 $d := b^2-4ac$ に対するペル方程式 $t^2-du^2=4$ の最小解，$u_\gamma := \gcd(\gamma_{21}, \gamma_{11}-\gamma_{22}, -\gamma_{12}) > 0$ である．さらに，$\gamma \in \mathrm{Prim}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ のノルム $N(\gamma)$ は対応する二次形式の基本単数 $\epsilon(d) := (t+u\sqrt{d})/2$ の平方に等しい．なので，$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のとき，length spectrum の重複度 $m(N)$ は，判別式 d に対する狭義の類数 $h(d)$ を用いて，

$$m(N) = \sum_{\substack{d>0:\ \text{not square} \\ \epsilon(d)=N^{1/2}}} h(d)$$

と書ける（[Sa] を参照）．実は，Γ が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群である場合にも同じように，

$$m(N) = \sum_{\substack{d>0:\ \text{not square} \\ \epsilon(d)=N^{1/2}}} M_\Gamma(d)h(d) \tag{3.1}$$

と書けることがわかっている（[H] を参照）．ここで，$0 \le M_\Gamma(d) \le [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}):\Gamma]$ である．なので，類数分布に関する古典的な評価である $d^{1/2-\epsilon} \ll \log\epsilon(d)h(d) \ll d^{1/2-\epsilon}$ （[Mo] などを参照）を用いると，(3.1) から，

$$N^{1/2-\epsilon} \ll m(N) \ll N^{1/2-\epsilon} \tag{3.2}$$

を示すことができる．

次に，$\pi_\Gamma^{(k)}$ を評価するが，その前に

$$\Psi_\Gamma^{(k)}(x) := \sum_{\substack{N\in\mathrm{Norm}(\Gamma) \\ N<x}} \left(\frac{\log N(\gamma)}{N^{1/2}-N^{-1/2}} m(N)\right)^k$$

について考える．すると，(3.1) と類数公式 $\log\epsilon(d)h(d) = \sqrt{d}L(1,\chi_d)$ から，

$$\Psi_\Gamma^{(k)}(x) = \sum_{\substack{N\in\mathrm{Norm}(\Gamma) \\ N<x}} \left(\sum_{\epsilon(d)=N^{1/2}} 2u^{-1}M_\Gamma(d)L(1,\chi_d)\right)^k \tag{3.3}$$

が成り立つことがわかる．なので，あとは large sieve method を使って，(3.3) を

$$\Psi_\Gamma^{(k)}(x) \sim \exists b_\Gamma^{(k)} x1/2 \quad \text{as} \quad x\to\infty$$

と評価すると，Theorem 1.2 の $\pi_\Gamma^{(k)}(x)$ に関する漸近評価が得られる． □

4 まとめとして

$\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のとき，$\{\mathrm{tr}\gamma\}_{\gamma\in\mathrm{Prim}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))}=\mathbb{Z}_{\geq 3}$，$N(\gamma)\sim(\mathrm{tr}\gamma)^2$ なので，$\pi^{(0)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(x)\sim x^{1/2}$ as $x\to\infty$ である．Γ が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群であるときも同様に $\pi^{(0)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(x)\sim\exists c x^{1/2}$ が成り立つ．すると，この $\pi^{(0)}_\Gamma$ の評価と素元定理 $\pi^{(1)}_\Gamma(x)\sim\mathrm{li}(x)$，そして Theorem 1.2 をあわせて考えると，Γ が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群の場合，$m(N)$ はだいたい，$\mathrm{li}_1(N^{1/2})$ ぐらいの増大度をもつと考えることができる．それでは，一般の Γ についてはどうかというと，Γ が数論的（arithmetic）であるとき，$\pi^{(0)}_\Gamma(x)=O(x^{1/2})$ であることが [Ta]，[LS]，[Sc] によって示されている．さらに，この逆が，少なくとも $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ がコンパクトでないときには成り立っていることが [Sc] によって示されている．以上より，自然に，次のような問題が考えられる．

Problem 1. (i) Γ が数論的であることと，$\pi^{(k)}_\Gamma(x)\sim c^{(k)}_\Gamma\mathrm{li}_k(x^{\frac{k+1}{2}})$ が任意の $k\geq 2$ に対して成り立つことは同値か？
(ii) Γ が非数論的であることと，$\pi^{(k)}_\Gamma(x)=o\big(\mathrm{li}_k(x^{\frac{k+1}{2}})\big)$ が任意の $k\geq 2$ に対して成り立つことは同値か？

参考文献

[BLS] E. Bogomolny, F. Leyvraz and C. Schmit, *Distribution of eigenvalues for the modular group*, Commun. Math. Phys. **176** (1996), 575–617.

[G] C. F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Fleischer, Leipzig, 1801.

[H] Y. Hashimoto, *Arithmetic expressions of Selberg's zeta functions for congruence subgroups*, J. Number Theory **122** (2007), 324–335.

[He] D. Hejhal, *The Selberg trace formula of* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *I, II*, Springer Lec. Notes in Math. **548, 1001** Springer-Verlag (1976, 1983).

[LS] W. Luo and P. Sarnak, *Number variance for arithmetic hyperbolic surfaces*, Commun. Math. Phys. **161** (1994), 419–432.

[Mo] R. A. Mollin, *Quadratics*, CRC Press Series on Discrete Mathematics and Its Applications, CRC Press (1995).

[Pe] M. Peter, *The correlation between multiplicities of closed geodesics on the modular surface*, Commun. Math. Phys. **225** (2002), 171–189.

[Ra] B. Randol, *The length spectrum of a Riemann surface is always of unbounded multiplicity*, Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), 455–456.

[Sa] P. Sarnak, *Class numbers of indefinite binary quadratic forms*, J. Number Theory, **15** (1982), 229-247.

[Sc] P. Schmutz, *Arithmetic groups and the length spectrum of Riemann surfaces*, Duke Math. J., **84** (1996), 199-215.

[Se] A. Selberg, *Collected Papers I*, Springer-Verlag (1989).

[高] 高木貞治，代数的整数論, 第 2 版，岩波書店 (1971).

[Ta] K. Takeuchi, *A characterization of arithmetic Fuchsian groups*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 600–612.