

A model category for orbifold cohomology

信州大学大学院 工学系研究科 数理・自然情報科学専攻

野口 和範

noguchi@math.shinshu-u.ac.jp

Frobenius ring 上の module の category と chain complex の category が model category になることについては、[Hov99] に詳しく書いてあります。これらの model category は cofibrantly generated model category という model category で、現在発見されている model category の大半は cofibrantly generated です。その定義は [Hov99], [Hir03] に書いてありますが、簡単に言うと2つの morphism の collection I, J からそれぞれ trivial fibration(I -inj) と cofibration(I -cof), fibration(J -inj) と trivial cofibration(J -cof) が lifting property を使って生成されているという model category です。

model category の条件の中で一番きついのが functorial factorization ですが、その具体的な構成方法の例の一つ。Strøm は [Str72] で位相空間の category が weak equivalence を homotopy equivalence, fibration を Hurewicz fibration, cofibration を NDR-pair として model category になることを示しましたが、その functorial factorization のとり方はかなり複雑です。以下にその図式を載せておきます。

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow i_f & \nearrow p_f & \uparrow q_f \\
 & E_f & \\
 \widehat{E}_f & \xrightarrow{j_f} & Z_f \\
 \nearrow e_f & & \downarrow
 \end{array}$$

ここで i_f : trivial cofibration, $p_f \circ e_f$: fibration, $j_f \circ i_f$: cofibration, q_f : trivial fibration であり、

$$\widehat{E}_f = E_f \times (0, 1] \amalg X \times I / \sim \quad (x, c_f(x), t) \sim (x, t)$$

$$Z_f = \widehat{E}_f \times (0, 1] \amalg Y$$

Z_f は位相の取り替えも行うことで $\widehat{E}_f \times (0, 1]$ と Y を接着させて cylinder にしてあります。

実際、morphism $f : X \rightarrow Y$ という条件だけから上のような functorial factorization の構成を行うのはかなり困難ですが、small object argument と

いう定理がその困難を多少回避してくれます。この定理は small な object の無限回の push-out によって作られた object を経由することで functorial factorization を構成するものですが、この定理の元々の idea 自体は Quillen のものらしく、それを一般的に現在の形にしたのがどうやら Hirschhorn のようです。これによりある category が cofibrantly generated model category であることを示すことができます。しかしその定理の証明を読むのは少々大変です。証明自体は [Hov99],[Hir03] に載っていますが、ordinal, cardinal, transfinite induction などの集合論の知識と、colimit の性質を使ったかなり抽象的な証明です。Frobenius ring 上の module の model category も chain complex の model category も、この small object argument を使って証明されています。

加えて [DS95] も model category についてよく書かれた論文であると思います。

Bibliography

- [DS95] W. G. Dwyer and J. Spaliński. Homotopy theories and model categories. In *Handbook of algebraic topology*, pages 73-126. North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [Hir03] Philip S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*, volume 99 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Hov99] Mark Hovey. *Model categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [Str72] Arne Strøm. The homotopy category is a homotopy category. *Arch. Math. (Basel)*, 23:435-441, 1972.