Some relations in universal enveloping algebras of three dimensional Lie algebras

筑波大学大学院数理物質科学研究科　村田駿祐 (Shunsuke MURATA)

$\mathbb{C}$ 上の２元生成の３次元リー代数 L を考える．３次元リー代数 L は derived ideal の次元と center が derived ideal に含まれるか否かにより，次の５パターンに分類されていることが知られている．

(a) L は abelian

(b) L はハイゼンベルグ代数（以下，$\mathfrak{H}$ と書くことにする）

(c) $L = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}g \quad s.t.$

$$[e, f] = e \qquad [e, g] = 0 \qquad [f, g] = 0$$

(d) $L = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}g \quad s.t.$

$$[e, f] = 0 \qquad [e, g] = e \qquad [f, g] = \alpha f \qquad \text{(d)-}(\alpha)$$

$$[e, f] = 0 \qquad [e, g] = e + \beta f \qquad [f, g] = f \qquad \text{(d)-}(\beta)$$

ただし, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^{\times}$であり, $\alpha\alpha' = 1$ となるα'はαによって決まるものと同型.

(e) 特殊線形リー代数（以下 $\mathfrak{sl}_2$ と書くことにする）

上記の分類において２元生成にできないパターンは (a) 及び (d)-(α) の $\alpha = 1$ の２種類の場合のみで，他は全て２元生成にできることが知られている．従って，この場合を除いて $L = \langle x, y\rangle$（２元生成）と仮定し，その包絡代数 $U(L)$ を考える．

このとき，次の事実が知られている．

Fact

L：$\mathbb{C}$ 上３次元リー代数

$U(L)$ ：L の包絡代数

$L = \langle x, y\rangle$ ：２元生成と仮定

$U_k = \sum_{0 \le m \le k} (\mathbb{C}xy^m + \mathbb{C}y^m x + \mathbb{C}y^m) \quad (k \ge 0)$ とする．

このとき，$U(L)$ において以下の式が成立する．

$$(\mathrm{A_k}) \quad yxy^k \equiv \frac{k}{k+1} xy^{k+1} + \frac{1}{k+1} y^{k+1} x \quad (\mathrm{mod} U_k)$$

$$(\mathrm{B_k}) \quad y^k xy \equiv \frac{1}{k+1} xy^{k+1} + \frac{k}{k+1} y^{k+1} x \quad (\mathrm{mod} U_k)$$

□

上記の事実より，３次元リー代数の包絡代数上で成立する関係式の枠組みが見える．実は $L = \mathfrak{H}, \mathfrak{sl}_2$ の場合，自然な生成元をとったときの U_k の具体的な値が知られており，特に $L = \mathfrak{H}$ のときは０である．いま，この場合を (H) 型と呼ぶとき，この関係式によって他の２元生成３次元リー代数の特徴付けを行うことができる．

また，前述の $\mathfrak{sl}_2$ の場合の関係式より $U(\mathfrak{sl}_2)$ における PBW 基底とは異なる形の基底を導くことができることが知られており，さらに $\mathfrak{sl}_2$ の量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ において Fact のような関係式が知られている．これらのことから，$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ における PBW 基底とは異なる形の基底を導くことができる．

今回の講演では以上の２点について話をしようと思います．