根付き平面二分木を用いた Generalized Schur Operators の例

沼田 泰英 (北海道大学大学院理学研究科, nu@math.sci.hokudai.ac.jp)

K を標数 0 の体とし, 整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対して, V_i を有限次元 K-線型空間とし, $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i$ を V とおく. 非負整数 $j \in \mathbb{N}$ と整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対して U_j は $U_j(V_i) \subset V_{i+j}$ を満す V 上の K-線型写像, D_j は $D_j(V_i) \subset V_{i-j}$ を満す V 上の K-線型写像とする. この様な U_j, D_j たちが, ある $\{\, a_m \in K \,\}_{m\in\mathbb{N}}$ に対して,

$$D(t')U(t) = a(tt')U(t)D(t') \tag{1}$$

(ただし, $D(s)$, $U(s)$, $a(s)$ は, それぞれ, 母関数 $\sum_i D_i s^i$, $\sum_i U_i s^i$, $\sum_i a_i s^i$ とする.) を満しているとする. このとき, $U(t_n)\cdots U(t_1)$ と $D(t_1)\cdots D(t_n)$ を generalized Schur operaotors with $\{\, a_m \,\}$ と呼ぶ.

Genralized Schur operators の prototypical な例は, 次で定義される, ヤング図形全体を基底とする線型空間上の線形写像である:

$$U_i\lambda = \sum_{\substack{\mu;\ \lambda \text{ に各列高々 } 1 \text{ 箱,}\\ \text{全部で } i \text{ 箱加えると } \mu \text{ になる.}}} \mu, \qquad D_i\lambda = \sum_{\substack{\mu;\ \mu \text{ に各列高々 } 1 \text{ 箱,}\\ \text{全部で } i \text{ 箱加えると } \lambda \text{ になる.}}} \mu.$$

これは, generalized Schur operators with $\{\, a_i = 1 \,\}_{i\in\mathbb{N}}$ であり, Young tableaux の数え上げ (Robinson-Schensted-Knuth 対応) や, Young tableaux の母関数である Schur 多項式に関する公式 (Pieri 公式, Cuachy 公式) は generalized Schur operators を用いて解釈する事も出来る. この意味で Generalized Schur operators はヤング図形達の一般化と思うことが出来る対象である.

F を alphabet $\{\, l, r \,\}$ で生成される word 全体からなる集合とし, 長さ 0 の word を 0 と書く事にする. $v, w \in F$ に対して $v \le vw$ とする事で F は poset となる. Poset F の ideal T (i.e., $v \in T$ と $w \in F$ に対して $w \in v$ なら $w \in T$ となっている集合) を *(rooted planar binary) tree* と呼ぶことにする. Tree T の元 $w \in T$ をノードと呼ぶ. $\mathbb{T}$ を tree 全体の集合とする. $\mathbb{T}$ を基底とする線形空間を V とおく. $T \in \mathbb{T}$, $v \in F$ に対して, $T_v = \{w \in T | v \le w\}$ とする.

T を tree とする. 写像 $\varphi : T \to \{\, 1, \dots, m \,\}$ が

- $\varphi(w) \le \varphi(v)$ for $w \in T$ and $v \in T_{wl}$
- $\varphi(w) < \varphi(v)$ for $w \in T$ and $v \in T_{wr}$

を満たしている時に, *right-strictly-increasing labelling* と呼び,

- $\varphi(w) \ge \varphi(v)$ for $w \in T$ and $v \in T_{wl}$
- $\varphi(w) < \varphi(v)$ for $w \in T$ and $v \in T_{wr}$

を満たしている時には *binary-searching labelling* と呼ぶ.

Tree T に対し, quasi-symmetric polynomials P_T, Q_T を次で定義する:

$$P_T(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\varphi;\ \text{a right-strictly-increasing labelling}} t^\varphi, \qquad Q_T(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\varphi;\ \text{a binary-searching labelling}} t^\varphi,$$

ただし, labelling φ に対して, $t^\varphi = \prod_{w\in T} t_{\varphi(w)}$ とする.

Right-strictly-increasing labelling に trees の列としての表示を与える. Right-strictly-increasing labelling φ の定義から, 任意の n に対して, 逆像 $\varphi^{-1}(\{1, \dots, n\})$ は tree である. また, 任意の $w \in \varphi^{-1}(\{\, 1, \dots, n+1 \,\}) \setminus \varphi^{-1}(\{\, 1, \dots, n \,\})$ に対して, $w = v_w r l^n$ または $w = v_w l^n$ となる $v_w \in \varphi^{-1}(\{\, 1, \dots, n \,\})$ が存在する. 従って, right-strictly-increasing labelling は, 任意の $w \in T^{i+1} \setminus T^i$ に対して, $w = v_w r l^n$ または $w = v_w l^n$ となる $v_w \in T^{i+1}$ が存在するような $m+1$ 個の trees からなる列 $(\emptyset = T^0, T^1, \dots, T^m)$ と同一視することができる.

V 上の線形写像 U_i を, tree T に対し

$$U_i T = \sum_{\substack{T': T \text{ に } vl^n \text{ または } vl^n\ (v \in T) \text{ という形のノードを} \\ i \text{ こ付け加えることによって得られる tree}}} T'$$

となるように定義する, 母関数 $U(s) = \sum_i U_i s$ を考えると, Tree T と変数 $t_1, \ldots, t_n$ に対して $U(t_n) \cdots U(t_1) T$ における $\emptyset$ の係数は $P_T(t_1, \ldots, t_n)$ に一致する.

次に binary-searching trees について考える. Tree T に対して, s_T を $\{w \in T | w = vlw' \Rightarrow vr \notin T.\ wr \notin T.\}$ とする. 集合 s_T は chain である. s_T の ideal $s = \{\, s_1, s_2, \ldots, s_i \,\}$ に対して, tree $T \ominus s$ を

$$T \ominus s = \cdots ((T \ominus s_i) \ominus s_{i-1}) \ominus \cdots \ominus s_1$$

ただし $wr \notin T$ である $w \in T$ に対して

$$T \ominus w = (T \setminus T_w) \cup \{wv | wlv \in T_w\}$$

とする. $T \ominus w$ から T への自然な inclusion $\bar{\nu}$ が次のように定義される.

$$\bar{\nu}(v') = \begin{cases} wlv & v' = wv \in T_w \\ v' & v' \notin T_w. \end{cases}$$

この inclusion $\bar{\nu}$ から, inclusion $\nu : T \ominus s \to T$ が導かれる.

Tree T から $\{1, \ldots, m\}$ への Binary-searching labelling φ は, その定義から, 逆像 $\varphi^{-1}(\{m\})$ が s_T の ideal であることが分かる. Inclusion $\nu : T \ominus \varphi^{-1}(\{m\}) \to T$ と φ から作られる写像 $\varphi \circ \nu$ は, $T \ominus \varphi^{-1}(\{m\})$ から $\{1, \ldots, m-1\}$ への binary-searching labelling となっている. 従って, binary-searching labellings φ と, $m+1$ 個の trees の列 $(\emptyset = T^0, T^1, \ldots, T^m)$ であって各 i に対して $T^i = T^{i+1} \ominus s$ を満たすような $s_{T^{i+1}}$ の ideal s が存在するものを同一視することができる.

V 上の線形写像 D_i を

$$D_i T = \sum_{s;\ s_T \text{ の } i \text{ 個のノードからなる ideal}} T \ominus s$$

となるように定義する. 母関数 $D(s) = \sum_i D_i s$ を考えると, Tree T と変数 $t_1, \ldots, t_n$ に対して $D(t_1) \cdots D(t_n) T$ における $\emptyset$ の係数は $Q_T(t_1, \ldots, t_n)$ に一致する.

Theorem (Main resut) この様に定義された $D(t')$, $U(t)$ は次の等式を満たす:

$$D(t')U(t) = \frac{1}{1 - tt'} U(t) D(t').$$

つまり generalized Schur operators である.

$U(t_n) \cdots U(t_1)$, $D(t_1) \cdots D(t_n)$ が generalized Schur operaotors である事より, P_T, Q_T に関する公式や labelling の数えあげに対する結果を得ることが出来る:

Pieri's formula $\displaystyle\sum_{T'} Q_{T'}(t_1, \ldots, t_n) = h_j(t_1, \ldots, t_n) \cdot Q_T(t_1, \ldots, t_n),$

ただし, 左辺の T' は T に j 個のノードを right strictly に付け加えることで得られる trees を動き, $h_j(t_1, \ldots, t_n)$ は j 次斉次完全対称多項式を表す.

Cauchy's formula $\displaystyle\sum_{T} P(t'_1, \ldots, t'_n) Q_T(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - t'_i t_j},$

ただし, 左辺の Ttrees 全体を動く.

Loday-Ronco 対応 Robinson-Schensted-Knuth 対応に相当する一対一対応が generalized Schur operators に対して構成されている. Loday-Ronco 対応として知られる対応の一般化にあたるものが得られる.