

Classification of isosceles sets which have the maximum cardinality in 4-dimensional Euclidean space

城戸 浩章 (Hiroaki Kido)
九州大学大学院数理学研究院
(Faculty of Mathematics, Kyushu University)

1 Introduction

\mathbb{R}^k を k 次元ユークリッド空間とする。

$x, y \in \mathbb{R}^k$ を $x = (x_1, x_2, \dots, x_k), y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ とするとき、 x と y の距離を $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2}$ で定める。

Definition 1.1. 有限集合 $X \subset \mathbb{R}^k$ に対して、

$$A(X) = \{d(x, y) | x, y \in X, x \neq y\}$$

とおく。このとき、 $|A(X)| = s$ であるならば、 X を \mathbb{R}^k における s -distance set と呼ぶ。

また、2つの s -distance set が互いに相似である場合は同型であるということにする。

2-distance set の点の個数の最大値は、 \mathbb{R}^1 、 \mathbb{R}^2 (Kelly [10])、 \mathbb{R}^3 (Croft [5]) の場合に知られていた。さらに、 $k \leq 8$ に対する \mathbb{R}^k の場合は Lisoněk [16] によって与えられ、次のページの Table 1 のような結果が得られている。(坂内-坂内 [1] より抜粋)

また、 $|X| \geq k + 2$ であるならば、 \mathbb{R}^k における 2-distance set となる X は有限個であることが Einhorn-Schoenberg [6] により示された。2-distance set の2つの距離の比については、Larman-Logers-Seidel [15] により、 $|X| > 2k + 3$ であるならば、 \mathbb{R}^k における 2-distance set X の2つの距離の比は $\sqrt{\alpha - 1} : \sqrt{\alpha}$ となることが示された(ただし、 α は $\alpha \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{k}{2}}$ を満たすある整数)。

一般の s -distance set X については、Bannai-Bannai-Stanton [2] や Blokhuis [3] によって $|X| \leq \binom{k+s}{s}$ という上限が与えられた。また、 $|X| \geq 5$ ならば、 \mathbb{R}^2 における 3-distance set X は有限個で、 \mathbb{R}^2 における 3-distance set の点の個数の最大値は7である (Shinohara [17]) ということが知られている。 \mathbb{R}^3 における 3-distance set については、点の個数の最大値は12であり、最大値を与える 3-distance set の存在が同型を除けば一意であることが Shinohara [18] によって示された。それにより、 \mathbb{R}^3 における 3-distance set の個数が(同型を除いて)有限個になるのは点の個数がいくつのときか? という問題については、その答えを満たす最小の値を a とすると、 a は $7 \leq a \leq 12$ の範囲にあることが知られている。しかし、これらの結果を除いては s -distance set についての結果はあまり得られていない。

また、2-distance set を考える際の1つのアイデアとして、isosceles set というものがあり、次で定義される。

Table 1: 2-distance set の点の個数の最大値

k	$\binom{k+2}{2}$	2-distance set の 点の個数の最大値	最大値を与える 2-distance set の個数
1	3	3	1
2	6	5	1
3	10	6	6
4	15	10	1
5	21	16	1
6	28	27	1
7	36	29	1
8	45	45	≥ 1

Definition 1.2. \mathbb{R}^k において、 n 個の点からなる集合を考える。

この集合の任意の 3 点が 2 等辺 3 角形をなしているとき (ここでは、同一直線上の 3 点も 2 等辺 3 角形とみなす)、この集合は n -point isosceles set であるという。

さらに、この集合が s -distance set であるときは、isosceles n -point s -distance set と呼ぶことにする。

任意の 2-distance set は isosceles set になっていることから、isosceles set は研究されるようになった。

次に、この isosceles set について知られていることをまとめておく。

- \mathbb{R}^1 では isosceles set の点の個数の最大値は 3 である。
- \mathbb{R}^2 における 7-point isosceles set は存在しない。(Golomb [9], Kelly [10])
- \mathbb{R}^2 における 6-point isosceles set は、同型を除けば正 5 角形とその中心の 6 点からなる集合 (次のページの Fig. 1) の唯 1 つに定まる。(Golomb [9], Kelly [10])
- \mathbb{R}^2 における 5-point isosceles set は、同型を除けば Fig. 2 の 3 つの集合に限る。(Fishburn [8], Golomb [9])
- \mathbb{R}^3 における 9-point isosceles set は存在しない。(Croft [5])
- \mathbb{R}^3 における 8-point isosceles set は、同型を除いて Fig. 3 で表される集合の唯 1 つに定まる。(Kido [13])
- $s \leq 4$ を満たす s に対して、 \mathbb{R}^3 における isosceles 8-point s -distance set は存在しない。(Kido [13])
- \mathbb{R}^3 における 7-point isosceles set は同型を除いても無限に存在する。
- \mathbb{R}^3 における isosceles 7-point 3-distance set は、同型を除けば Fig. 4 の 15 個に分類される。(Kido [14])

Fig. 1. \mathbb{R}^2 における唯一つの 6-point isosceles set

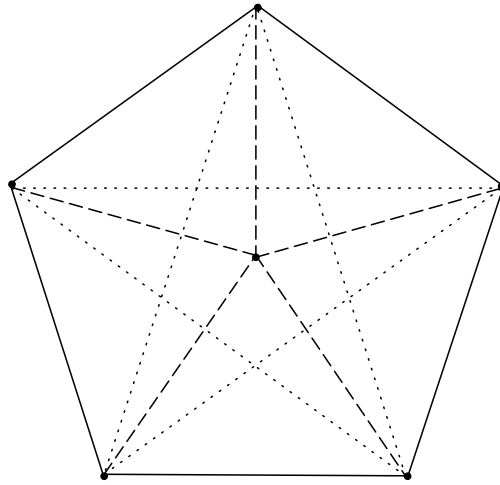


Fig. 2. \mathbb{R}^2 における全 3 個の 5-point isosceles set

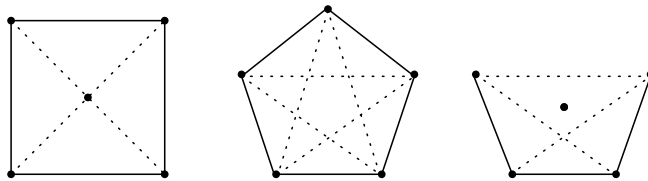


Fig. 3. \mathbb{R}^3 における唯一つの 8-point isosceles set

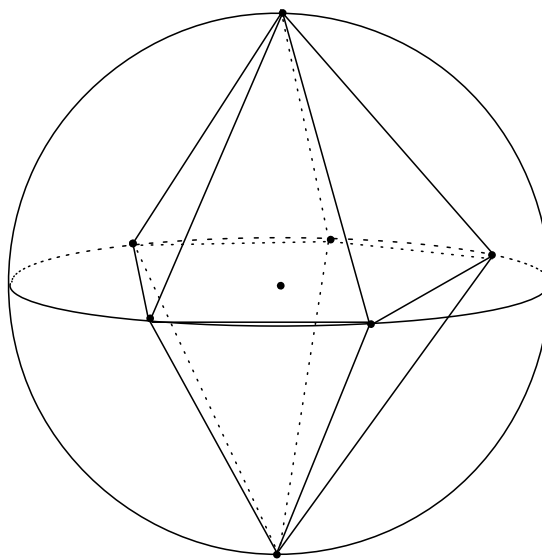
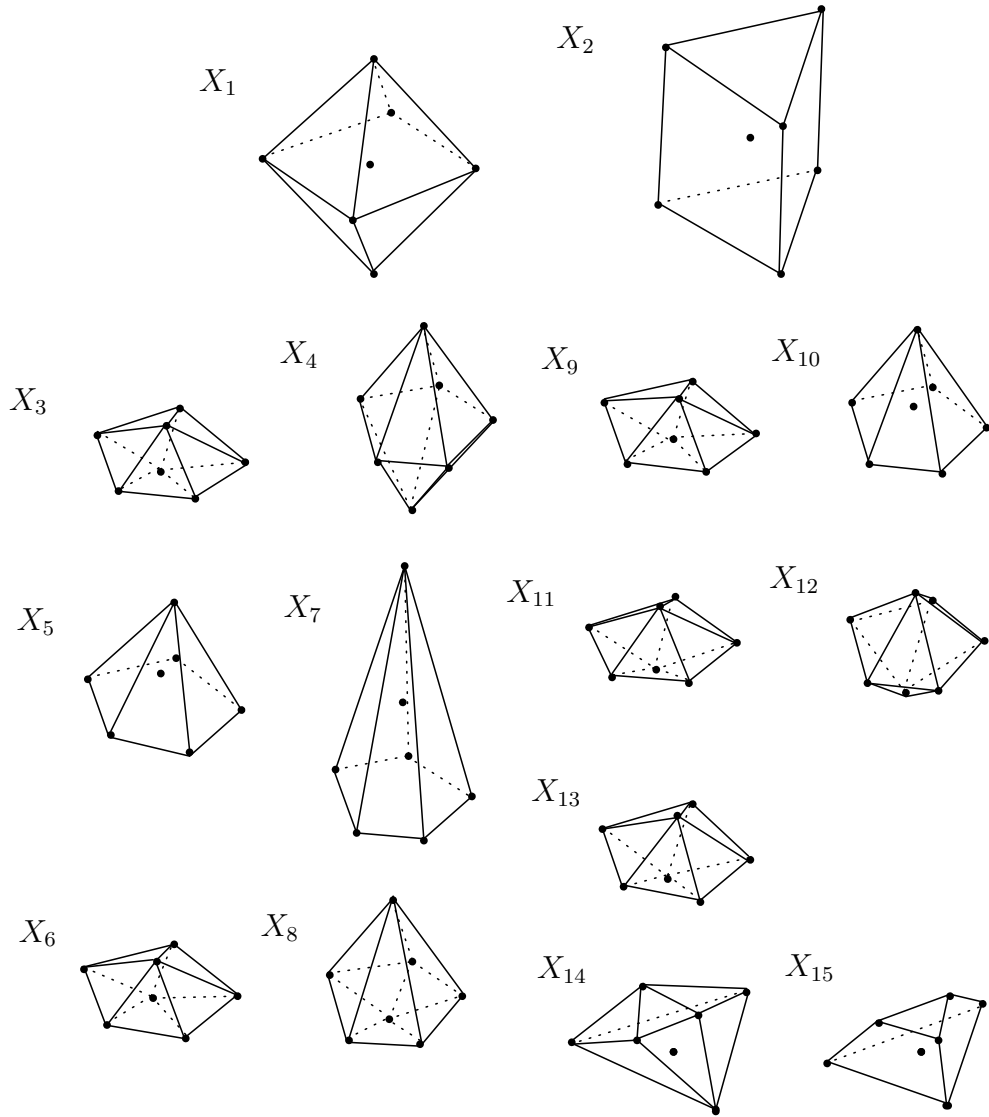


Fig. 4. \mathbb{R}^3 における全 15 個の isosceles 7-point 3-distance set



(注意: $X_1, X_2, X_5, X_7, X_{10}, X_{14}, X_{15}$ には線で結ばれていない点が1つあるが、これは残りの点から等距離の位置にある点を表している。また、 $X_3, X_6, X_9, X_{11}, X_{13}$ は同じように見えるが、正5角形の1辺の長さとお角線の長さとは異なる3つ目の距離が違って、互いに相似ではない。同様に X_5 と X_{10} も相似ではない。)

今回は、 \mathbb{R}^4 における isosceles set の点の個数の最大値および分類について考えた。 \mathbb{R}^4 における isosceles set については、現時点では 11-point isosceles set の構成は可能であることが分かっていて、次の 2 つがその例である。

X' を次の集合とする。

$$X' = \{e_i + e_j | 1 \leq i, j \leq 4, i \neq j\} \cup \{-e_k + (\frac{3+\sqrt{5}}{4}, \frac{3+\sqrt{5}}{4}, \frac{3+\sqrt{5}}{4}, \frac{3+\sqrt{5}}{4}) | 1 \leq k \leq 4\}$$

すると X' は \mathbb{R}^4 における唯 1 つの 10-point 2-distance set である (Lisoněk [16] 参照)。 X' の 10 点は同一 3 次元球面上にあるので、その中心である $(\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{5}}{10})$ を加えた集合

$$X = X' \cup \{(\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{5}}{10})\}$$

は \mathbb{R}^4 における 11-point isosceles set となる。 X' や X は正方形を含んでいることに注意しておく。もう 1 つの 11-point isosceles set の例は、

$$Y = \{(\cos \frac{2j}{5}\pi, \sin \frac{2j}{5}\pi, 0, 0) | 0 \leq j \leq 4\} \cup \{(0, 0, \cos \frac{2k}{5}\pi, \sin \frac{2k}{5}\pi) | 0 \leq k \leq 4\} \cup \{(0, 0, 0, 0)\}$$

である。 Y は正 5 角形を含んでいる。

次の定理と系は本講演における主結果である。

Theorem 1.1. \mathbb{R}^4 における 11-point isosceles set は同型を除くと 2 つに分類され、それらは上述の X と Y である。

次の Corollary 1.1 は Theorem 1.1 から分かる命題である。

Corollary 1.1. \mathbb{R}^4 における 12-point isosceles set は存在しない。したがって、 \mathbb{R}^4 における isosceles set の点の個数の最大値は 11 である。

\mathbb{R}^3 における Croft の手法 [5] を \mathbb{R}^4 に拡張することにより、この Theorem 1.1 の証明を行った。証明の概略を次の節以降で述べる。

2 Notation and a fundamental lemma

次の言葉を導入する。

apex : 3 点以上からなる集合において、残りすべての点から等距離の位置にある点

$\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ を n -point isosceles set とする。 \mathcal{P} の点 P_i の "vertex-number" $V(P_i)$ を $V(P_i) = (\mathcal{P}$ を含む 3 点からなる部分集合をすべて考え、そのうち、 P_i が apex となっているものの数) = ($\angle P_i$ を頂角とする 2 等辺 3 角形の個数) で定義する。

このとき、

$$V(P_1) + \dots + V(P_n) \geq \binom{n}{3} \tag{1}$$

が成り立つ。

また、点 P_i から \mathcal{P} の残りの点との距離を考える。距離 a となる点が r 個、距離 b となる点が s 個、 \dots 、距離 l となる点が u 個あったとき (a, b, \dots, l) は互いに異なり、 $r \geq s \geq \dots \geq u$ とする。また、 $r + s + \dots + u = n - 1$ 、点 P_i は $\text{type}(r, s, \dots, u)$ の点であるということにする。

P_i が $\text{type}(r, s, \dots, u)$ であるならば、

$$V(P_i) = \binom{r}{2} + \binom{s}{2} + \dots + \binom{u}{2} \quad (2)$$

が成り立つ。

11-point isosceles set の分類を考えるうえで、最も基本的な補題を述べる。

Lemma 2.1. $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_{11}\}$ を \mathbb{R}^4 における 11-point isosceles set とし、 P_1 が最大の vertex-number であるとする。このとき P_1 の type は、次の Case (A) から Case (H) までのいずれかを満たしている。

Case (A): (10) ,

Case (B): $(9,1), (8,2), (8,1,1)$,

Case (C): $(7,3), (7,2,1)$,

Case (D): $(6,4), (6,3,1), (5,5), (5,4,1)$,

Case (E): $(7,1,1,1)$,

Case (F): $(6,2,2)$,

Case (G): $(6,2,1,1)$,

Case (H): $(6,1,1,1,1)$.

Proof: $V(P_1) + \dots + V(P_{11}) \geq \binom{11}{3} = 165$ が (1) より成り立つので、 $V(P_1) \geq 15$ となる。

ゆえに、 P_1 の type を (r, s, \dots, u) とすると、(2) より、

$$\binom{r}{2} + \binom{s}{2} + \dots + \binom{u}{2} \geq 15 \quad (3)$$

が成り立ち、さらに、

$$r + s + \dots + u = 10 \quad (4)$$

も成り立つ。

(3) と (4) の両方を満たすには、 (r, s, \dots, u) は補題にある Case (A) から Case (H) までのいずれかでなければならない。■

3 Sketch of the proof of Theorem 1.1

ポイントとなる補題や命題を以下に紹介することによって(ただし、それらの証明は省略する) Theorem 1.1 の証明の概略を述べる。

Lemma 2.1 における P_1 の type を Case (A) から Case (H) のそれぞれに場合分けして考察することによって(複雑な議論によるものもある) 次の補題が示される。

Lemma 3.1. \mathbb{R}^4 における 11-point isosceles set が存在するならば、11 点のうちのある 4 点は同一円周上にある。■

11 点のうちのある 4 点は同一円周上にあることが分かったので、同一円周上の 4 点の配置を考える。次の補題はそれについてのもので、Croft [5] の Lemma 18 と同様に証明できる。

Lemma 3.2. 4-point isosceles set をなす同一円周上の 4 点は、正方形の 4 点もしくは正 5 角形の 4 点に限る。■

Lemma 3.2 より、正方形の 4 点を含む 11-point isosceles set と正 5 角形の 4 点を含む 11-point isosceles set の分類をそれぞれ考えればよい。

《正 5 角形の 4 点を含む 11-point isosceles set について》

Proposition 3.3. $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ を \mathbb{R}^4 における正 5 角形の 4 点を含む n -point isosceles set とし、 P_1, P_2, P_3, P_4 は正 5 角形の 4 点であるとする(P_4 と P_1 の間には"gap"がある)。

このとき、 $P_1 = (\frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, 0, 0)$, $P_2 = (-\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$, $P_3 = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$, $P_4 = (\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, 0, 0)$ と仮定できる。

(P_2P_3 の中点が原点で、正 5 角形の 1 辺の長さは 1 である。)

すると、残りの点の座標は次のいずれかを満たしていなければならない。

- (i) $(0, \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, z, w)$, 但し、 z と w は任意,
- (ii) 正 5 角形の残りの点である $(0, \frac{5+3\sqrt{5}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, 0, 0)$,
- (iii) $(0, \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, z, w)$, 但し、 z と w は $z^2 + w^2 = (\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}})^2$ を満たしている。■

Proposition 3.3 で $n = 11$ の場合を考える。残りの点について、(i)~(iii) の条件を加味して考察すると、次の結果を得る。

Lemma 3.4. \mathbb{R}^4 において、正 5 角形の 4 点を含む 11-point isosceles set は同型を除くと Theorem 1.1 の Y に限られる。■

《正方形を含む 11-point isosceles set について》

Proposition 3.5. $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ を \mathbb{R}^4 における正方形を含む n -point isosceles set とし、 P_1, P_2, P_3, P_4 は正方形であるとする。このとき、 $P_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$, $P_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$, $P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $P_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ と仮定できる。

すると、残りの点の座標は次のいずれかを満たしていなければならない。

- (i) $(0, 0, z, w)$, 但し、 z と w は任意,
- (ii) $(0, -\frac{1}{2}, z, w)$, $(\frac{1}{2}, 0, z, w)$, $(0, \frac{1}{2}, z, w)$, $(-\frac{1}{2}, 0, z, w)$ のうちの 1 つ, 但し、 z と w は $z^2 + w^2 = \frac{3}{4}$ を満たしている。■

Proposition 3.5 で $n = 11$ の場合を考える。残りの点について、(i), (ii) の条件を加味して考察すると、次の結果を得る。

Lemma 3.6. \mathbb{R}^4 において、正方形の 4 点を含む 11-point isosceles set は同型を除くと Theorem 1.1 の X に限られる。■

以上の結果をまとめると、Theorem 1.1 を得る。■

4 Assignments

今後の研究課題としては、次のようなものが挙げられる。

- (i) \mathbb{R}^3 における 7-point 3-distance set は同型を除いて有限個なのか？それとも無限に存在するか？
- (ii) $s = 3, k \geq 3$ に対して、 \mathbb{R}^k における s -distance set の個数が同型を除いて有限個になるのは点の個数がいくつの時か？
- (iii) $s = 3, k \geq 4$ に対して、 \mathbb{R}^k における s -distance set の点の個数の最大値はいくつになるのか？
- (iv) 3-distance set の 3 つの距離の比について何か言えないか？(Larman-Logers-Seidel [15] の拡張)
- (v) $k \geq 5$ に対して、 \mathbb{R}^k における isosceles set の点の個数の最大値はいくつになるのか？

また、Fishburn [8] により、isosceles set の概念を拡張した t -isosceles set が以下のように定義された。(ただし、Fishburn [8] ではユークリッド空間の次元 k は 2 と固定されている。)

Definition 4.1. $t \geq 3$ とする。 \mathbb{R}^k における n 個の点からなる集合について、2 等辺 3 角形をなしている 3 点 (ここでも同一直線上の 3 点も 2 等辺 3 角形とみなす) が任意の t 点部分集合に存在するとき、この集合は n -point t -isosceles set であるという。

これまで考えてきた isosceles set は、この定義の $t = 3$ 、つまり 3-isosceles set になっている。Fishburn [8] は $k = 2, t = 4$ の場合についての予想や問題提起をしていて、それらについての部分的結果はいくつかの文献で見られる。しかし、isosceles set や s -distance set で考えたような "点の個数の最大値" や "分類" についてはまだ得られていないようである。これについても取り組みたいと考えている。(t -isosceles set については、Brass-Moser-Pach [4] も参照されたい。)

References

- [1] 坂内英一、坂内悦子、球面上の代数的組合せ理論、シュプリンガー・フェアラーク 東京、1999.
- [2] E. Bannai, E. Bannai, and D. Stanton, An upper bound for the cardinality of an s -distance subset in real Euclidean space, II, *Combinatorica* **3** (1983), 147-152.

- [3] A. Blockhuis, Few-distance sets, Ph. D. thesis, Eindhoven Univ. of Technology (1983), (CWI Tract (7) 1984).
- [4] P. Brass, W. Moser, and J. Pach, Research Problems in Discrete Geometry, Springer New York, 2005.
- [5] H. T. Croft, 9-point and 7-point configuration in 3-space, *Proc. London. Math. Soc.* (3), **12** (1962), 400-424, Corrigendum. *ibid.* **13** (1963), 384.
- [6] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, On Euclidean sets having only two distances between points I, *Indag. Math.* **28** (1966), 479-488. (Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.69)
- [7] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, On Euclidean sets having only two distances between points II, *Indag. Math.* **28** (1966), 489-504. (Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.69)
- [8] P. Fishburn, Isosceles Planar Subsets, *Discrete Comput. Geom.* **19** (1998), 391-398.
- [9] M. Golomb, Advanced Problems and Solutions. Isosceles n -points, *Amer. Math. Monthly*, **55** (1948), 513-514.
- [10] L. M. Kelly, Elementary Problems and Solutions. Isosceles n -points, *Amer. Math. Monthly*, **54** (1947), 227-229.
- [11] 城戸浩章、3次元ユークリッド空間における isosceles 8-point set の分類、数理解析研究所講究録 1394 代数的組合せ論 (2004), 138-151.
- [12] 城戸浩章、3次元ユークリッド空間における isosceles 7-point 3-distance sets の分類、数理解析研究所講究録 1476 代数的組合せ論とその周辺 (2006), 28-33.
- [13] H. Kido, Classification of isosceles eight-point sets in three-dimensional Euclidean space, *European J. Combin.*, **27** (2006), 329-341.
- [14] H. Kido, Classification of isosceles 7-point 3-distance sets in 3-dimensional Euclidean space, *European J. Combin.*, **28** (2007), 685-704.
- [15] D. G. Larman, C. A. Logers, and J. J. Seidel, On two-distance sets in Euclidean space, *Bull. London Math. Soc.*, **9** (1977), 261-267.
- [16] P. Lisoněk, New maximal two-distance sets, *J. Comb. Theory*, Ser. A.77 (1997), 318-338.
- [17] M. Shinohara, Classification of three-distance sets in two dimensional Euclidean space, *European J. Combin.*, **25** (2004), 1039-1058.
- [18] M. Shinohara, Uniqueness of maximum three-distance sets in the three-dimensional Euclidean space, preprint.