Some relations in universal enveloping algebras of three dimensional Lie algebras

筑波大学大学院数理物質科学研究科　村田駿祐 (Shunsuke MURATA)

1　はじめに

$\mathbb{C}$ 上の２元生成の３次元リー代数 L を考える．３次元リー代数 L は derived ideal の次元と center が derived ideal に含まれるか否かにより，次の５パターンに分類されていることが知られている [2].

(a) L は abelian

(b) L はハイゼンベルグ代数（以下，$\mathfrak{H}$ と書くことにする）

(c) $L = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}g \quad s.t.$

$$[e, f] = e \qquad [e, g] = 0 \qquad [f, g] = 0$$

(d) $L = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}g \quad s.t.$

$$[e, f] = 0 \qquad [e, g] = e \qquad [f, g] = \alpha f \tag{d)-(α}$$

$$[e, f] = 0 \qquad [e, g] = e + f \qquad [f, g] = f$$

$$\text{ただし}, \alpha \in \mathbb{C}^{\times}\text{であり}, \alpha\alpha' = 1 \text{ となる}\alpha'\text{は}\alpha\text{によって決まるものと同型}.$$

(e) 特殊線形リー代数（以下 $\mathfrak{sl}_2$ と書くことにする）

上記の分類において２元生成にできないパターンは (a) 及び (d)-(α) の $\alpha = 1$ の２種類の場合のみで，他は全て２元生成にできることが知られている [3]. 従って，この場合を除いて $L = \langle x, y\rangle$（２元生成）と仮定し，その包絡代数 $U(L)$ を考える．このとき，$U(L)$ における関係式は２元 x, y の積により表される。本稿では，まずある種の関係式によって上記の分類に対する考察を行う．そして，この研究に関連して導かれた $U(\mathfrak{sl}_2)$ の新たな基底の決定を受けて，その q 類似である量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ における新しい基底を求める.

以下が今回の私の結果である.

Main result

(i) L を３次元リー代数とする．いま，関係式

$$\text{(H)} \quad \begin{cases} yxy^k = \dfrac{k}{k+1}xy^{k+1} + \dfrac{1}{k+1}y^{k+1}x \\ y^kxy = \dfrac{1}{k+1}xy^{k+1} + \dfrac{k}{k+1}y^{k+1}x \end{cases}$$

を (H) 型と呼ぶことにすると次の事実が成り立つ.

・$L \cong \mathfrak{H} \quad \Longleftrightarrow \quad$ (H) 型は任意の $x, y \in L \ s.t. L = \langle x, y \rangle$ に対して成立する．

・$L \cong \mathfrak{sl}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad$ (H) 型を満たす $x, y \in L \ s.t. L = \langle x, y \rangle$ は存在しない．

・$L \ncong \mathfrak{H}, \mathfrak{sl}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad$ (H) 型を満たす $x, y \in L \ s.t. L = \langle x, y \rangle$ が存在し，
(H) 型を満たさない $x, y \in L \ s.t. L = \langle x, y \rangle$ も存在する．

(ii) $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を $\mathfrak{sl}_2$ の量子群とする．このとき，

$$U_q(\mathfrak{sl}_2) = \Big(\bigoplus_{i \geq 0, j \geq k \geq 0} \mathbb{C} e^i f^j e^k \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \geq 0, j \geq k \geq 0} \mathbb{C} e^i f^j e^k \Big) t$$

が成立する．

□

2　３次元リー代数における関係式

２元生成の３次元リー代数 L の包絡代数 $U(L)$ において，以下の事実が知られている [3].

Fact 2.1. L：$\mathbb{C}$ 上３次元リー代数
$U(L)$ ：L の包絡代数
$L = \langle x, y \rangle$ ：２元生成と仮定
$U_k = \displaystyle\sum_{0 \leq m \leq k} (\mathbb{C} x y^m + \mathbb{C} y^m x + \mathbb{C} y^m) \quad (k \geq 0)$ とする．
このとき，$U(L)$ において以下の式が成立する．

$$\begin{aligned} &(\mathrm{A_k}) \quad y x y^k \equiv \frac{k}{k+1} x y^{k+1} + \frac{1}{k+1} y^{k+1} x \quad (\mathrm{mod} U_k) \\ &(\mathrm{B_k}) \quad y^k x y \equiv \frac{1}{k+1} x y^{k+1} + \frac{k}{k+1} y^{k+1} x \quad (\mathrm{mod} U_k) \\ &(\mathrm{C_k}) \quad y U_k \subseteq U_{k+1},\ U_k y \subseteq U_{k+1} \end{aligned}$$

□

Fact2.1 は３次元リー代数の包絡代数上で成立する関係式の枠組みを定めている．この関係式はリー代数の構造と生成元の選び方によって，剰余項 U_k だけが変化する．L が $\mathfrak{H}$ や $\mathfrak{sl}_2$ の場合には U_k の部分がそれぞれ定まっており，次のようになることが知られている．

Fact 2.2. (i)　$L = \mathfrak{H}$，すなわち

$$[p, q] = r, \quad [r, p] = 0, \quad [r, q] = 0$$

を満たすリー代数 $\mathfrak{H} = \mathbb{C} p \oplus \mathbb{C} q \oplus \mathbb{C} r$ とする．このとき

$$\begin{aligned} &(\mathrm{A}_k) \quad q p q^k = \frac{k}{k+1} p q^{k+1} + \frac{1}{k+1} q^{k+1} p \\ &(\mathrm{B}_k) \quad q^k p q = \frac{1}{k+1} p q^{k+1} + \frac{k}{k+1} q^{k+1} p \end{aligned}$$

が成立する．

(ii) $L = \mathfrak{sl}_2$，すなわち

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h$$

を満たすリー代数 $\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}h$ とする．このとき

$$(\mathrm{A}_k) \quad fef^k = \frac{k}{k+1}ef^{k+1} + \frac{1}{k+1}f^{k+1}e + kf^k$$
$$(\mathrm{B}_k) \quad f^kef = \frac{1}{k+1}ef^{k+1} + \frac{k}{k+1}f^{k+1}e + kf^k$$

が成立する．

□

以下，Fact2.2 の (i) のような剰余項が 0 になる形の関係式を (H) 型と呼び，(ii) のような剰余項が kf^k となる形の関係式を (S) 型と呼ぶことにする．

さて，$\mathfrak{H}$ や $\mathfrak{sl}_2$ においては剰余項 U_k の値を決めることができた．しかし，U_k の定義をいま一度見てみると，剰余項 U_k はより複雑な値をとりうることがわかる．実際，一般には剰余項をコントロールすることさえ非常に難しい．しかし，上の (H) 型や (S) 型の関係式によって，前述のリー代数の分類に従った U_k による特徴付けを行うことができる．すなわち，次の命題が成立する．

Proposition 2.3. L を３次元リー代数とし，L は２元生成であると仮定する．このとき，

(i) $L \ncong \mathfrak{sl}_2$ ならば，$L = \langle x, y \rangle$ とするとき

$$(\mathrm{A}_k) \quad yxy^k = \frac{k}{k+1}xy^{k+1} + \frac{1}{k+1}y^{k+1}x$$
$$(\mathrm{B}_k) \quad y^kxy = \frac{1}{k+1}xy^{k+1} + \frac{k}{k+1}y^{k+1}x$$

を満たす元 $x, y \in L$ が存在する．

(ii) $L \cong \mathfrak{sl}_2$ ならば，$L = \langle x, y \rangle$ とするとき

$$(\mathrm{A}_k) \quad yxy^k = \frac{k}{k+1}xy^{k+1} + \frac{1}{k+1}y^{k+1}x$$
$$(\mathrm{B}_k) \quad y^kxy = \frac{1}{k+1}xy^{k+1} + \frac{k}{k+1}y^{k+1}x$$

を満たす元 $x, y \in L$ は存在しない．

□

Proposition 2.4. L を３次元リー代数とし，L は２元生成であると仮定する．このとき，

(i) $L \cong \mathfrak{H}$ ならば，$L = \langle x, y \rangle$ を満たす全ての $x, y \in L$ に対して

$$(\mathrm{A}_k) \quad yxy^k = \frac{k}{k+1}xy^{k+1} + \frac{1}{k+1}y^{k+1}x$$
$$(\mathrm{B}_k) \quad y^kxy = \frac{1}{k+1}xy^{k+1} + \frac{k}{k+1}y^{k+1}x$$

が成立する．

(ii) $L = \langle x, y \rangle$ を満たす全ての $x, y \in L$ に対して

$$(\mathrm{A}_k) \quad yxy^k = \frac{k}{k+1}xy^{k+1} + \frac{1}{k+1}y^{k+1}x$$
$$(\mathrm{B}_k) \quad y^kxy = \frac{1}{k+1}xy^{k+1} + \frac{k}{k+1}y^{k+1}x$$

が成立するならば $L \cong \mathfrak{H}$ となる．

□

上の命題より，L を３次元リー代数とし，$L = \langle x, y \rangle$（２元生成）と仮定するとき．包絡代数における関係式は以下のようにまとめることができる．

L の種類	包絡代数における関係式
$\mathfrak{H}$	(H) 型のみ実現可能
$\mathfrak{sl}_2$	(H) 型が実現不可能
その他の L	(H) 型が実現可能

□

L が $\mathfrak{H}$ でも $\mathfrak{sl}_2$ でもない”その他の L”における剰余項 U_k はコントロールすることさえ難しいと前述した．しかし，多くの計算の結果，(d)-(β) の場合において，複雑ではあるがコントロールできる例を見つけることができた．これはちょうど x, y を取り替えると (H) 型が成立する例である．この例を以下に紹介する．

Proposition 2.5. $L = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}g$ を

$$[e, f] = 0, \quad [e, g] = e + f, \quad [f, g] = f$$

を満たすリー代数とする．

(i) $x = g, y = e$ とおくと次の (H) 型の式が成立する．

$$(\mathrm{A}_k) \quad yxy^k = \frac{k}{k+1}xy^{k+1} + \frac{1}{k+1}y^{k+1}x$$
$$(\mathrm{B}_k) \quad y^kxy = \frac{1}{k+1}xy^{k+1} + \frac{k}{k+1}y^{k+1}x$$

(ii) $x = e, y = g$ とおくと剰余項が 0 にならない次の式が成立する．

$$(\mathrm{A}_k) \quad yxy^k = \frac{k}{k+1}xy^{k+1} + \frac{1}{k+1}y^{k+1}x - xy^k + \sum_{i=1}^{k} \frac{{}_k\mathrm{C}_i}{k-i+1}y^ix + \frac{1}{k+1}x$$
$$(\mathrm{B}_k) \quad y^kxy = \frac{1}{k+1}xy^{k+1} + \frac{k}{k+1}y^{k+1}x + \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{k-i+1}{}_k\mathrm{C}_i}{k-i+1}xy^i + y^kx + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}x$$

□

3 $\mathfrak{sl}_2$ の量子群における基底の決定

さて，３次元リー代数 L において $L = \mathfrak{sl}_2$ または $L = \mathfrak{H}$ の場合，それぞれの包絡代数において

$$U(\mathfrak{H}) = \sum_{i,j,k \geq 0} \mathbb{C}p^iq^jp^k$$
$$U(\mathfrak{sl}_2) = \sum_{i,j,k \geq 0} \mathbb{C}e^if^je^k$$

となることが知られている [3]．ここで，$j \geq k$ という条件を入れると，上式はそれぞれ

$$U(\mathfrak{H}) = \bigoplus_{i \geq 0, j \geq k \geq 0} \mathbb{C} p^i q^j p^k$$

$$U(\mathfrak{sl}_2) = \bigoplus_{i \geq 0, j \geq k \geq 0} \mathbb{C} e^i f^j e^k \tag{$*$}$$

となることが知られている [5]．見て分かる通り，これらはそれぞれの包絡代数の PBW 基底とは異なる基底になっている．

ここで $\mathfrak{sl}_2$ の量子群を考える．$\mathbb{C}$ を複素数体とする。$q \in \mathbb{C}^\times$ を１つ固定し，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，$q^m \neq 1$ とする。このとき，$\mathfrak{sl}_2$ の量子群は $e, f, t^{\pm 1}$ で生成され，次の基本関係式を満たす $\mathbb{C}$ 上の結合代数である。

$$t^{\pm 1} t^{\mp 1} = 1, \quad tet^{-1} = q^2 e, \quad tft^{-1} = q^{-2} f, \quad [e, f] = \frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

いま，$\mathfrak{sl}_2$ の量子群を $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ と書くとき，$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ における (S) 型のような関係式が存在する．また，$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ においても次の結果が知られている [4].

$$U_q(\mathfrak{sl}_2) = \Big(\sum_{i,j,k \geq 0} \mathbb{C} e^i f^j e^k \Big) + \Big(\sum_{i,j,k \geq 0} \mathbb{C} e^i f^j e^k \Big) t$$

この結果を受けて，$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ においても $(*)$ の類似が得られないか考えた結果，上の式に $j \geq k$ という条件を入れることで，次の結果を得ることができた．

Theorem 3.1. $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を $\mathfrak{sl}_2$ の量子群とする．このとき，

$$U_q(\mathfrak{sl}_2) = \Big(\bigoplus_{i \geq 0, j \geq k \geq 0} \mathbb{C} e^i f^j e^k \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \geq 0, j \geq k \geq 0} \mathbb{C} e^i f^j e^k \Big) t$$

が成立する．

□

References

[1] 谷崎俊之，リー代数と量子群，共立出版，現代数学の潮流，2002 年

[2] N. Jacobson , *LIE ALGEBRAS* , Dover , 1962

[3] S. Berman , J. Morita , Y. Yoshii , *Some Factorizations in Universal Enveloping Algebras of Three Dimensional Lie Algebras and Generalizations*, Canad.Math.Bull.Vol.45(4), 2002 pp.525-536

[4] J. Morita , H. Sakaguchi , *Some Formulae in $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ and Diagonalizability*, Kyushu J.Math.Vol.57, 2003 pp.165-173

[5] H. Chiba , J. L. Guo , J. Morita , *A New Basis of $U(\mathfrak{sl}_2)$ and Heisenberg Analogue*, (preprint)

[6] 村田駿祐，包絡代数における数式処理，修士論文，2007 年