HOOK FORMULAS FOR A GENERALIZED YOUNG DIAGRAM — COLORED HOOK FORMULA —

KENTO NAKADA

1. はじめに

Colored Hook Formula は,Young 図形の standard tableaux に関する Hook Formula と異なり, 多変数有理式に関する等式であり, その等式の形は極めて特徴的である. また, Colored Hook Formula は, Young 図形だけでなく D. Peterson によって導入された generalized Young diagram に対して成立する.

本報告では, まず前半は, Young 図形の場合に Colored Hook Formula がどのようになるかを説明し, 後半では generalized Young diagram の場合に Kac-Moody Lie algebra の言葉を用いて Colored Hook Formula を厳密に記述する.

2. Young 図形の場合

2.1. Young 図形と Hook.

Young 図形というのは第 4 象限に cell をできるだけ左上に詰めた図形のことである. 例えば, Figure 2.1 （左）の様な図形で, これは $(6, 5, 5, 4, 4, 3, 1)$ と書かれる.

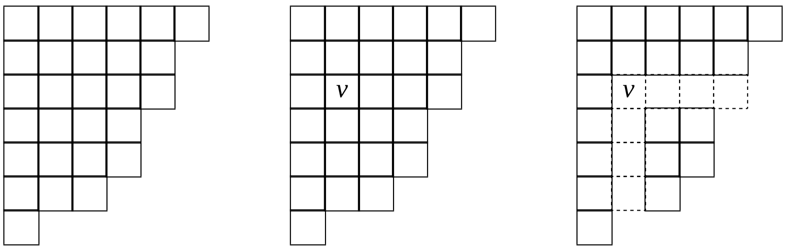


Figure 2.1. $(6, 5, 5, 4, 4, 3, 1)$ 型の Young 図形, cell v, cell v の hook

定義 1. 集合 $\mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ の部分集合 Y が Young 図形であるとは, 次を満たすことである:

(1) Y は有限集合.

(2) If $(i, j) \in Y$ and $(i, j) \leq (i', j')$, then we have $(i', j') \in Y$.

ただし, ここで $\mathbb{N}_+$ は正整数の集合であり（ 0 を許さない）, また, $(i, j) \leq (i', j')$ は $i \geq i'$ and $j \geq j'$ のことである. Young 図形の全体を $\mathbb{Y}$ と書くことにする.

注意 1. 上で $(i, j) \leq (i', j') \Leftrightarrow i \geq i'$ and $j \geq j'$ という（あまり標準的でない）順序を入れているが, この順序の入れ方は後の定義との整合性のためである.

次に Hook を定義する.

定義 2. $Y \in \mathbb{Y}$ とする. $v = (i, j) \in Y$ とする. Y の部分集合 $H(v)$ を次で定義する:

$$H(v) := \left\{ (i', j') \in Y \,\middle|\, \text{“}i' = i \text{ and } j' \geq j\text{”} \text{ or } \text{“}i' \geq i \text{ and } j' = j\text{”} \right\}.$$

$H(v)$ を v の hook, $\#H(v)$ を v の hook-length と呼ぶ.

例えば, Figure 2.1（中）の cell v の Hook は Figure 2.1 （右）の破線の図形になる.

2.2. **Standard tableaux と Hook formula.**

Young 図形 Y 上の standard tableau の概念を定義する.

定義 3. $Y \in \mathbb{Y}$ とする. $d := \#Y$ を Y の cell の個数とする. 全単射 $T : \{1, \cdots, d\} \longrightarrow Y$ が Y 上の standard tableau であるとは, 次を満たすことである:

$$\text{If } T(p) \leq T(q), \text{ then we have } p \geq q, \quad (p, q \in \{1, \cdots, d\}).$$

Y 上の standard tableaux 全体を $\mathrm{STab}(Y)$ と書く.

例 1. 例えば, Y が $(3, 2)$ 型 Young 図形の場合, Y 上の standard tableau は下に挙げるように全部で 5 個ある:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

与えられた Young 図形上の standard tableaux の総数について次の定理が知られている:

定理 2.1 (Hook Formula)**.** $Y \in \mathbb{Y}$ とする. このとき, 次が成立する:

$$\#\mathrm{STab}(Y) = \frac{\#Y!}{\prod_{v \in Y} \#H(v)}. \tag{2.1}$$

例 2. Y が $(3, 2)$ 型 Young 図形の場合, 各 cell の hook-length を書き込むと:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

となり, 定理 2.1 より,

$$\#\mathrm{STab}(Y) = \frac{5!}{4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 5,$$

を得る.

注意 2. 例 1 と例 2 は, 定理 2.1 を $(3, 2)$ 型 Young 図形の場合に例示したものである.

注意 3. 定理 2.1 はもともと対称群の表現論と関係して現れたものである. 集合 $\mathbb{Y}_d$ を:

$$\mathbb{Y}_d := \left\{ Y \in \mathbb{Y} \,\middle|\, \#Y = d \right\},$$

とおくと, d 次対称群 $\mathfrak{S}_d$ の複素既約表現は $\mathbb{Y}_d$ でパメトライズされる. このとき, $Y \in \mathbb{Y}_d$ でパラメトライズされる複素既約表現 ρ_Y の次元を $\chi_Y(1)$ とすれば:

$$\chi_Y(1) = \frac{d!}{\prod_{v \in Y} \#H(v)}$$

が成り立つ. このように, 定理 2.1 はもともと表現論に由来するのだが, 一方で, われわれの colored hook formula は組み合わせ論的に記述される. 事実, 今のところ colored hook formula に表現論的意味付けは付いていない. これは今後の課題でもある.

2.3. **Sato のゲームと Hook formula.**

講演ではほとんど触れることができなかったので, 少し詳しく説明する.
$Y, Y' \in \mathbb{Y}$ に対して, Young 図形 Y からある cell の hook を「抜いて」「詰める」ことにより, Young 図形 Y' を得るとき、$Y \to Y'$ と書く.
ここで,「抜いて」「詰める」とは Figure 2.2 ような操作のことである（ここでは cell v の hook を抜いて詰める場合）:

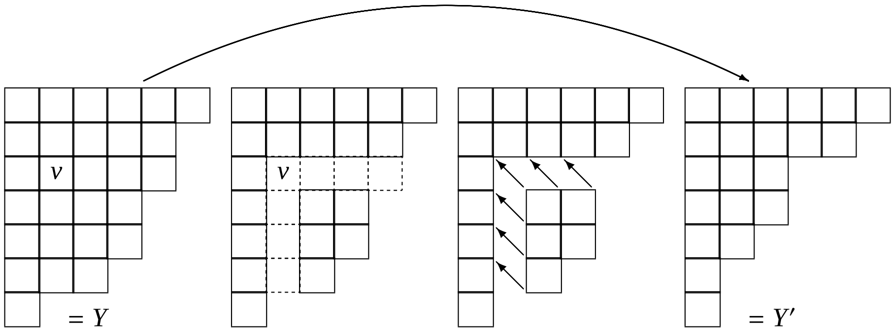


Figure 2.2. Y から cell v の hook を抜いて詰めると Y' が得られる ($Y \to Y'$)

佐藤幹夫は Young 図形をやり取りする次のようなゲームを考えた.

定義 4. $Y \in \mathbb{Y}$ を固定する. 以下のルールで行うゲームを Sato のゲームと呼ぶ.

(1) 先手, 後手の二人のプレイヤーがいる.
(2) 最初, 先手が Y を持っている.
(3) まず, 先手が $Y \to Y'$ となる Y' をひとつ選んで後手へ渡す.
次に, 後手が $Y' \to Y''$ となる Y'' をひとつ選んで先手へ渡す.
再び, 先手が $Y'' \to Y'''$ となる Y''' をひとつ選んで後手へ渡す.
このやり取りを繰り返す（いづれ, $\varnothing \in \mathbb{Y}$ にたどり着く）.
(4) $\varnothing$ を渡されたほうのプレイヤーの負け.

ゲームの必勝戦略を定める Grundy number を定義する.

命題 2.2. 写像 $G : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{N}$ で次の条件を満たすものは一意存在する:

$$G(Y) = \min\left(\mathbb{N} \setminus \left\{ G(Y') \in \mathbb{N} \,\middle|\, Y \to Y' \right\}\right) \quad Y \in \mathbb{Y}.$$

ここで, $\mathbb{N}$ は非負整数の集合（ 0 を許す）.

定義 5. 命題 2.2 で定まる G を Grundy map と呼び, $Y \in \mathbb{Y}$ に対して $G(Y)$ を Y の Grundy number と呼ぶ.

命題 2.3. $Y \in \mathbb{Y}$ とする. このとき, 以下は同値:

(1) Y を持つプレイヤーは必勝戦略を持たない.
（即ち, 相手に上手く立ち回られると絶対に勝てない）
(2) $G(Y) = 0$.

Grundy map (number) は佐藤のゲームに限らず任意の有限ゲームに対して定義されるが, 一般の有限ゲームでは, 与えられた局面の Grundy number を計算することは非常に困難である. ところが, 佐藤のゲームに関しては Grundy number を効率よく計算できる公式 Hook formula がある. この Hook formula を記述するために, $\mathbb{N}$ 上の二項演算 $\oplus$ （ Nim 和）を定義する.

定義 6. $n, m \in \mathbb{N}$ とする。n, m の二進展開を：

$$n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \epsilon_k 2^k \ (\epsilon_k \in \{1, 0\}), \qquad m = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_k 2^k \ (\delta_k \in \{1, 0\}),$$

とするとき, $n \oplus m$ を次で定義する:

$$n \oplus m := \sum_{k \in \mathbb{N}} (\epsilon_k \oplus \delta_k) 2^k.$$

ここで, $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 0$ である.

このとき, 明らかに次の命題が成立する.

命題 2.4. $l, m, n \in \mathbb{N}$ とする. このとき次が成り立つ:

(1) $(l \oplus m) \oplus n = l \oplus (m \oplus n)$.
(2) $0 \oplus n = n = n \oplus 0$.
(3) $n \oplus n = 0$.
(4) $n \oplus m = m \oplus n$.

定理 2.5 (Hook Formula)**.** $Y \in \mathbb{Y}$ とする. このとき、次が成立する:

$$G(Y) = \bigoplus_{v \in Y} \Big(\#H(v) \oplus (\#H(v) - 1) \Big). \tag{2.2}$$

注意 4. 式 (2.2) の右辺において " $-$ " は普通の減法である.

注意 5. 証明は佐藤幹夫による.

注意 6. この定理を hook formula と呼ぶのは一般的ではない. しかし, (2.1) と (2.2) の類似性に注目して, 定理 2.5 を hook formula と呼ぶことは自然だと思う.

注意 7. 佐藤は, 正整数 $n \in \mathbb{N}_+$ に対して, 自然数 $N(n)$ を:

$$N(n) := n \oplus (n - 1),$$

と定義し, これを n のノルムと呼んだ. ノルムを用いて (2.2) を書き直すと:

$$G(Y) = \bigoplus_{v \in Y} N\left(\#H(v)\right),$$

となる.

注意 8. 有限ゲームの定義を述べておく:
$\mathbb{P}$ を集合, $\rightarrow$ を $\mathbb{P}$ 上の二項関係とする. $p \in \mathbb{P}$ とする. Infinite p-path とは

$$p = p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \cdots$$

となる無限列のことである. $(\mathbb{P}; \rightarrow)$ が有限ゲームであるとは次を満たすことである:

(1) 各 $p \in \mathbb{P}$ に対して, $\#\left\{ q \in \mathbb{P} \;\middle|\; p \rightarrow q \right\} < \infty$.
(2) 各 $p \in \mathbb{P}$ に対して, $(\mathbb{P}; \rightarrow)$ は infinite p-path を含まない.

例 3. 佐藤のゲーム $(\mathbb{Y}; \rightarrow)$ は有限ゲームである.

有限ゲームに対しては, 命題 2.2, 命題 2.3 が成り立つ.

注意 9. このゲームの定義は, 川中によるゲームの定義 [3] より, だいぶ一般的であるが, 命題 2.2, 命題 2.3 を成立させるためには十分である.

2.4. **Young 図形の場合の Colored hook formula.**

ここで, Young 図形の場合に colored hook formula がどうなるかを説明する. colored hook formula は hook formula （定理 2.1 ）と異なり, 多変数の有理式に関する等式である. 多変数を考えるために, Young 図形 $Y \in \mathbb{Y}$ の各 cell に次を満たすように color と呼ばれるラベルをつける:

(1) cell (i, j) と (i', j') は $i - j = i' - j'$ のとき同じ color を持つ.
(2) cell (i, j) と (i', j') は $i - j \neq i' - j'$ のとき異なる color を持つ.

cell v の color を $c(v)$ と書く. また, 各 color c に対して不定元 α_c を考え, 不定元 α_c を color variable と呼ぶ. cell $v \in Y$ の hook $H(v)$ に対して一次式 β_v を次で定める:

$$\beta_v := \sum_{w \in H_v} \alpha_{c(w)},$$

Young 図形 Y から cell v の hook を抜いて詰めることにより Young 図形 Y' が得られるとき, $Y \xrightarrow{\beta_v} Y'$ と書く.

例 4. 例えば, Figure 2.1 (左) の Young 図形のとき, Figure 2.3 （左）のような color を入れよう. また, Figure 2.1 （中）の cell v の場合, Figure 2.3 （右）のようになる.

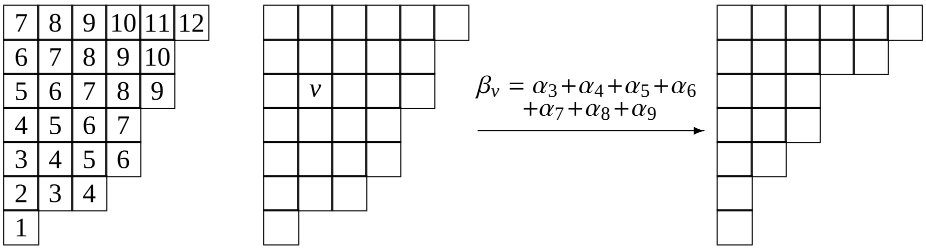


Figure 2.3

定理 2.6 (Colored Hook Formula for a Young Diagram)**.** $Y \in \mathbb{Y}$ とする. このとき, 次が成立する:

$$\sum_{\substack{Y=Y_0 \xrightarrow{\beta_1} Y_1 \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_l} Y_l \\ l \geq 0}} \frac{1}{\beta_1} \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \cdots \frac{1}{\beta_1 + \cdots + \beta_l} = \prod_{v \in Y} \left(1 + \frac{1}{\beta_v}\right). \tag{2.3}$$

ここで, 両辺は color variable α_c 達の有理式とみなしている.

系 2.7. $Y \in \mathbb{Y}$ とする. $d := \#Y$ とおく. このとき, 次が成立する:

$$\sum_{Y=Y_0 \xrightarrow{\alpha_{i_1}} Y_1 \xrightarrow{\alpha_{i_2}} \cdots \xrightarrow{\alpha_{i_d}} Y_d = \emptyset} \frac{1}{\alpha_{i_1}} \frac{1}{\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2}} \cdots \frac{1}{\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_d}} = \prod_{v \in Y} \frac{1}{\beta_v}. \tag{2.4}$$

Proof. 式 (2.3) の両辺で最低次（$-d$ 次）の項を比較すると式 (2.4) を得る. □

系 2.8. $Y \in \mathbb{Y}$ とする. $d := \#Y$ とおく. このとき, 次が成立する:

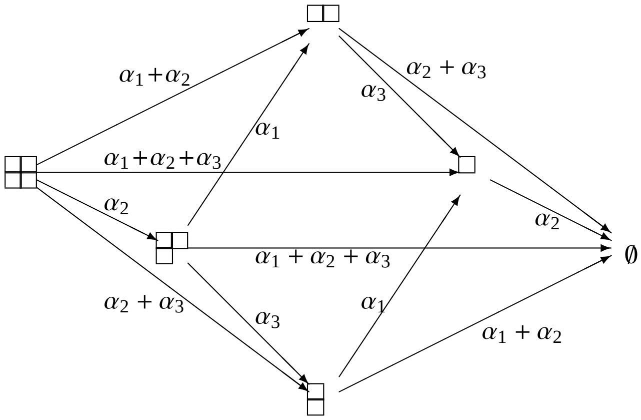
$$\#\mathrm{STab}(Y) = \frac{d!}{\prod_{v \in Y} \#H(v)}. \tag{2.5}$$

Proof. 式 (2.4) において, 各 color variable α_c に 1 を代入すると式 (2.5) を得る. □

注意 10. このようにして, われわれは定理 2.1 を系 2.8 として得る.

Colored Hook Formula for

例えば, Young 図形 の場合, この Young 図形に という color を入れれば次のような colored hook formula になる:



$$
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\\
&\quad+\frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}\\
&\quad+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{1}{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}\\
&\quad+\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}\\
&\quad+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}\\
&\quad+\frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{1}{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}\\
&\quad+\frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}\\
&\quad+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}\\
&\quad+\frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}\\
&=\left(1+\frac{1}{\alpha_2}\right)\left(1+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\left(1+\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}\right)\left(1+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right).
\end{aligned}
$$

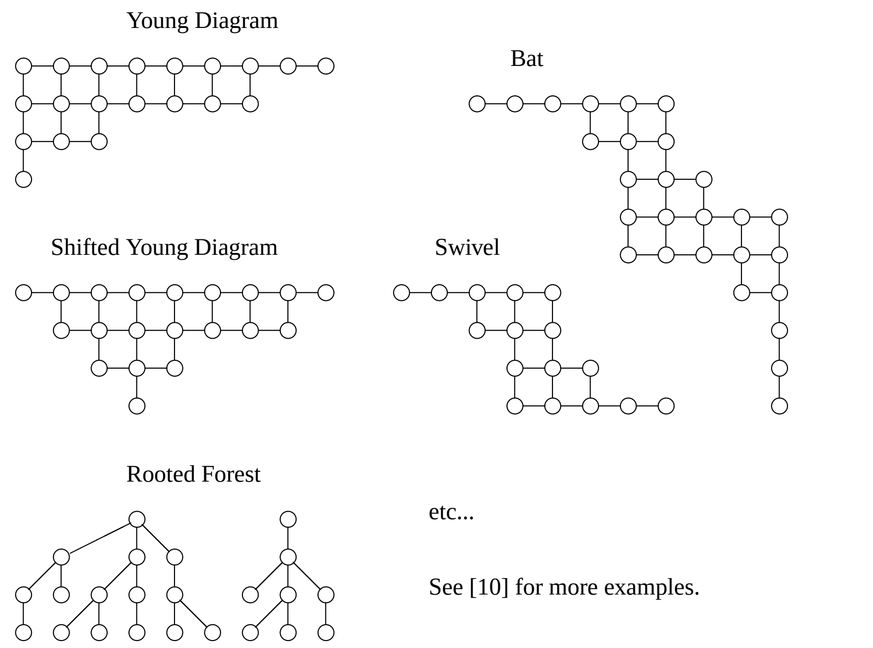
Taking the lowest degree part of this equation, we get:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}\\
&\qquad=\frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}.
\end{aligned}
$$

注意 11. Colored hook formula は以下に述べるように generalized Young diagram に対して成立するが, これは, 古典的な Young diagram に限っても新しいものになっている ことは強調しておきたい.

3. 一般の場合

examples of generalized Young diagrams



3.1. **Kac-Moody Lie algebra からの準備.** $A = (a_{i,j})_{i,j\in I}$ を Kac-Moody Lie algebra [2][4] の (symmetrizable とは限らない) Cartan matrix とする. $\mathfrak{h}$ を $\mathbb{R}$ -vector space, $\mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{h}$ の dual space とし, $\langle , \rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \to \mathbb{R}$ を cannonical な bilinear form とする. 線型独立な部分集合 $\Pi := \left\{ \alpha_i \;\middle|\; i \in I \right\} \subset \mathfrak{h}^*$ と $\Pi^\vee := \left\{ \alpha_i^\vee \;\middle|\; i \in I \right\} \subset \mathfrak{h}$ で $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = a_{i,j}$ を満たすものが存在すると仮定する. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ は次を満たすとき *integral weight* と呼ばれる:

$$\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}, \quad i \in I.$$

Integral weights の全体は P と書かれる. 各 $i \in I$ に対して, $s_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ を:

$$s_i : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*,$$

で定義し, $\left\{ s_i \;\middle|\; i \in I \right\}$ が生成する群 W を *Weyl group* と呼び, これは $\mathfrak{h}$ に:

$$\langle w(\lambda), w(h) \rangle = \langle \lambda, h \rangle, \quad w \in W, \lambda \in \mathfrak{h}^*, h \in \mathfrak{h},$$

で作用する. *root system* (resp. *coroot system*) を $\Phi := W\Pi$ (resp. $\Phi^\vee := W\Pi^\vee$) で定義する. Φ_+ と Φ_- で, Φ の positive roots と negative roots を表す. $\beta \in \Phi$ の *dual* $\beta^\vee \in \Phi^\vee$ は次を満たすように定められる:

$$w(\beta^\vee) = w(\beta)^\vee, \quad w \in W.$$

各 $\beta \in \Phi$ に対して, $s_\beta \in W$ を次で定義する:

$$s_\beta(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \beta^\vee \rangle \beta, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad \text{or, equivalently,} \quad s_\beta(h) = h - \langle \beta, h \rangle \beta^\vee, \quad h \in \mathfrak{h}.$$

各 $w \in W$ に対して, 集合 $\Phi(w)$ ($\subseteq \Phi_+$) を (*inversion set* と呼ばれる) 次で定義する:

$$\Phi(w) := \left\{ \gamma \in \Phi_+ \;\middle|\; w^{-1}(\gamma) < 0 \right\}.$$

3.2. **Generalized Young diagram と Hook.**

定義 7. $\lambda \in P$ が *pre-dominant* であるとは, 次を満たすことである:

$$\langle \lambda, \beta^\vee \rangle \geq -1\,, \quad \beta \in \Phi_+.$$

Pre-dominant integral weights のなす集合を $P_{\geq -1}$ で表す.

定義 8. $\lambda \in P_{\geq -1}$ に対して, 次で定義される集合 $\mathrm{D}(\lambda)$ を λ の *diagram* と呼ぶ:

$$\mathrm{D}(\lambda) := \left\{ \beta \in \Phi_+ \,\middle|\, \langle \lambda, \beta^\vee \rangle = -1 \right\}.$$

$\mathrm{D}(\lambda)$ の元を λ*-move* と呼ぶ. λ が *finite* であるとは, $\#\mathrm{D}(\lambda) < \infty$ を満たすことである.

定義 9. $\lambda \in P_{\geq -1}, \beta \in \mathrm{D}(\lambda)$ とする. 集合 $\mathrm{H}_\lambda(\beta)$ を次で定義する:

$$\mathrm{H}_\lambda(\beta) := \mathrm{D}(\lambda) \cap \Phi\left(s_\beta\right).$$

集合は $\mathrm{H}_\lambda(\beta)$ は *hook at* β *(in the diagram* $\mathrm{D}(\lambda)$ *)* と呼ばれる. 数 $\#\mathrm{H}_\lambda(\beta)$ は *hook-length at* β *(in the diagram* $\mathrm{D}(\lambda)$ *)* と呼ばれる.(See [3][5])

補題 3.1. $\lambda \in P_{\geq -1}, \beta \in \mathrm{D}(\lambda)$ とする. このとき, 次が成り立つ:

(1) $s_\beta(\lambda) \in P_{\geq -1}$.
(2) $\mathrm{D}(s_\beta(\lambda)) = s_\beta(\mathrm{D}(\lambda) - \mathrm{H}_\lambda(\beta))$.

注意 12. 補題 3.1 (2) は diagram $\mathrm{D}(\lambda)$ から hook $\mathrm{H}_\lambda(\beta)$ を抜いて詰めると新しい diagram $\mathrm{D}(s_\beta(\lambda))$ になる, ということを意味している. これは, 佐藤のゲームにおける操作がここで定義した $\mathrm{D}(\lambda)$ や $\mathrm{H}_\lambda(\beta)$ に対しても行うことができることを意味していて, また, これが $\mathrm{H}_\lambda(\beta)$ を Hook と呼ぶ根拠でもある.

定理 3.2. $\lambda \in P_{\geq -1}, \beta \in \mathrm{D}(\lambda)$ とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\#\mathrm{H}_\lambda(\beta) = \mathrm{ht}(\beta)\,.$$

3.3. **Colored Hook Formula.**

定義 10. $\lambda \in P_{\geq -1}$ とする. l を非負整数とし, positive roots の列 $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l)$ は次を満たすとき λ*-path* と呼ばれる:

$$\beta_p \in \mathrm{D}(s_{\beta_{p-1}} \cdots s_{\beta_1}(\lambda))\,, \quad 1 \leq p \leq l.$$

l を λ-path $\mathcal{B}$ の *length* と呼び, それを $\ell(\mathcal{B})$ と書く. $\ell(\mathcal{B})$ は 0 であってもよいことに注意する. λ-paths のなす集合は $\mathrm{Path}(\lambda)$ と表される.

定理 3.3 (Colored Hook Formula)**.** $\lambda \in P_{\geq -1}$ は finite であるとする. このとき, 次が成り立つ:

$$\sum_{\substack{(\beta_1,\cdots,\beta_l)\in\mathrm{Path}(\lambda)\\ l\geq 0}} \frac{1}{\beta_1}\frac{1}{\beta_1+\beta_2}\cdots\frac{1}{\beta_1+\cdots+\beta_l} = \prod_{\beta\in\mathrm{D}(\lambda)}\left(1+\frac{1}{\beta}\right). \tag{3.1}$$

ここで (3.1) は, 各 α_i を不定元とみなした上で, α_i 達の有理式とみなしている.

定義 11. $\lambda \in P_{\geq -1}$ は finite であるとする. $d := \#\mathrm{D}(\lambda)$ とおく. length が d の λ-paths のなす集合を $\mathrm{MPath}(\lambda)$ と書く.

注意 13. 補題 3.1 と定理 3.2 より, $(\beta_1, \cdots, \beta_d) \in \mathrm{MPath}(\lambda)$ とすれば, 各 β_k は simple root である.

系 3.4. $\lambda \in P_{\geq -1}$ は finite であるとする. $d := \#\mathrm{D}(\lambda)$ とおく. このとき, 次が成り立つ:

$$\sum_{(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_d})\in \mathrm{MPath}(\lambda)} \frac{1}{\alpha_{i_1}} \frac{1}{\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}} \cdots \frac{1}{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_d}} = \prod_{\beta\in \mathrm{D}(\lambda)} \frac{1}{\beta}. \tag{3.2}$$

Proof. 式 (3.1) の両辺で最低次（$-d$ 次）の項を比較すると式 (3.2) を得る. □

系 3.5. $\lambda \in P_{\geq -1}$ は finite であるとする. $d := \#\mathrm{D}(\lambda)$ とおく. このとき, 次が成り立つ:

$$\#\mathrm{MPath}(\lambda) = \frac{d!}{\prod_{\beta\in\mathrm{D}(\lambda)} \mathrm{ht}(\beta)}. \tag{3.3}$$

ここで, $\mathrm{ht}(\beta)$ は $\beta \in \Phi_+$ の height である.

Proof. 式 (3.2) において, 各 color variable α_i に 1 を代入すると式 (3.3) を得る. □

3.4. **Standard tableaux と Hook formula.**

定義 12. $\lambda \in P_{\geq -1}$ に対して, 次で定義される集合 $\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ を λ の *shape* と呼ぶ:

$$\mathrm{D}(\lambda)^\vee := \left\{ \beta^\vee \in \Phi_+^\vee \;\middle|\; \langle \lambda, \beta^\vee \rangle = -1 \right\}.$$

Shape $\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ はその ordinary order （$\Phi^\vee$ 上）で順序 $\leq$ を持っている。

Shape $\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ 上の standard tableau の概念を定義する。

定義 13. $\lambda \in P_{\geq -1}$ は finite であるとする. $d := \#\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ とおく. 全単射 $T : \{1, \cdots, d\} \longrightarrow \mathrm{D}(\lambda)^\vee$ が $\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ 上の standard tableau であるとは、次を満たすことである：

$$\text{If } T(p) \leq T(q), \text{ then we have } p \geq q, \quad (p, q \in \{1, \cdots, d\}).$$

Shape $\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ 上の standard tableaux 全体を $\mathrm{STab}(\mathrm{D}(\lambda)^\vee; \leq)$ と書く.

与えられた Shape 上の standard tableaux の総数について次の定理が成り立つ:

命題 3.6. $\lambda \in P_{\geq -1}$ は finite であるとする. $d := \#\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ とおく. このとき, 次が成り立つ:

$$\#\mathrm{MPath}(\lambda) = \#\mathrm{STab}(\mathrm{D}(\lambda)^\vee; \leq).$$

注意 14. この命題は実際に $\mathrm{MPath}(\lambda)$ と $\mathrm{STab}(\mathrm{D}(\lambda)^\vee; \leq)$ の間に canonical な bijection があることを示して証明される. 詳しくは [7] を参照のこと.

系 3.5 と命題 3.6 から次の定理を得る:

定理 3.7 (Hook Formula)**.** $\lambda \in P_{\geq -1}$ は finite であるとする. このとき、次が成り立つ：

$$\#\mathrm{STab}(\mathrm{D}(\lambda)^\vee; \leq) = \frac{(\#\mathrm{D}(\lambda)^\vee)!}{\prod_{\beta\in\mathrm{D}(\lambda)} \#\mathrm{ht}(\beta)}. \tag{3.4}$$

注意 15. J. Stembidge は, 次に説明する D. Peterson’s Hook Formula を仮定した上で定理 3.7 を証明している (See [13]). ただし, この論文当時, まだ Peterson’s Hook Formula は証明されていなかった. Peterson’s Hook Formula は J. B. Carrell の論文 [1] に初めて紹介されるが, Peterson はこの公式について, これは Young 図形における standard tableaux についての Hook formula（定理 3.7）の一般化である, と述べただけで, 一切, 証明や詳細は（論文や announce でも）語っていない.

注意 16. われわれの定理 3.7 の証明は Peterson’s Hook Formula を経由していない.

3.5. **Minuscule Elements と Peterson's Hook Formula.**

定義 14. Λ を dominant integral weight とする. （D. Peterson (see[1][9]) に従って）$w \in W$ が Λ-*minuscule* であるとは, ある（あるいは, 実は同値だが, 全ての）w の reduced decomposition $w = s_{i_1} \cdots s_{i_d}$ に対して

$$\langle s_{i_{p+1}} \cdots s_{i_d}(\Lambda), \alpha_{i_p}^{\vee} \rangle = 1, \quad 1 \le p \le d \tag{3.5}$$

が成り立つことである. w は, ある dominant integral weight Λ に対して Λ-minuscule であるとき, *minuscule* であると言われる.

命題 3.8. dominant integral weight Λ と Λ-minuscule 元 w のペア (Λ, w) に対して, $\lambda := w(\Lambda)$ とおく. このとき, λ は finite な pre-dominant integral weight になる. また, 対応 $(\Lambda, w) \mapsto \lambda$ は bijection である.

定義 15. $w \in W$ とする. w の reduced decompositions のなす集合を $\mathrm{Red}(w)$ と書く.

命題 3.9. $(\Lambda, w), \lambda$ を命題 3.8 の様だとする. $d := \#\mathrm{D}(\lambda)$ とおく.
このとき, $(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_d}) \in \mathrm{MPath}(\lambda)$ とすれば, $(s_{i_1}, \cdots, s_{i_d}) \in \mathrm{Red}(w)$ である. また, この対応 $(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_d}) \mapsto (s_{i_1}, \cdots, s_{i_d})$ は bijection である（ $\mathrm{MPath}(\lambda) \longrightarrow \mathrm{Red}(w)$ ）.

系 3.5, 命題 3.8, 命題 3.9 より, Peterson's Hook Formula の証明を得る:

定理 3.10 (Peterson's hook formula)**.** Λ を dominant integral weight とする. $w \in W$ を Λ-minuscule 元とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\#\mathrm{Red}(w) = \frac{\ell(w)!}{\prod_{\beta \in \Phi(w)} \mathrm{ht}(\beta)}. \tag{3.6}$$

注意 17. Minuscule 元は, R. A. Proctor [10] (simply-laced の場合) と J. R. Stembridge [13] (non-simply-laced の場合) によって分類されている.

注意 18. 定理 3.10 は岡村修志によって, ここで述べた手法とは独立に, Proctor による分類定理 [10] と確率アルゴリズムを用いて証明されている (See [8]).

References

[1] J. B. Carrell, *Vector fields, flag varieties and Schubert calculus,* Proc. Hyderbad Conference on Algebraic Groups (ed. S.Ramanan), Manoj Prakashan, Madras, 1991.
[2] V. G. Kac, "Infinite Dimentional Lie Algebras," Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990.
[3] N. Kawanaka, *Coxeter groups and Nakayama algorithm*, in preparation.
[4] R. V. Moody and A. Pianzola, "Lie Algebras With Triangular Decompositions," Canadian Mathematical Society Series of Monograph and Advanced Text, 1995.
[5] K. Nakada, *Colored hook formula for a generalized Young diagram*, to appear in Osaka J. of Math.
[6] K. Nakada, *q-Hook formula for a generalized Young diagram*, preprint.
[7] K. Nakada, *A hook formula for the standard tableaux of a generalized shape*, to appear in RIMS Kokyuroku-bessatsu.
[8] S. Okamura, *An algorithm which generates a random standard tableau on a generalized Young diagram* (in Japanese), master's thesis, Osaka university, 2003.
[9] R. A. Proctor, *Minuscule elements of Weyl groups, the numbers games, and d-complete posets,* J.Algebra **213** (1999), 272-303.
[10] R. A. Proctor, *Dynkin diagram classification of λ-minuscule Bruhat lattices and of d-complete posets,* J.Algebraic Combin. **9** (1999), 61-94.
[11] B. E. Sagan, "The Symmetric Group. *Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions,*" Springer, New York, 2001.
[12] R. P. Stanley, *Ordered Structures and Partitions,* Ph.D thesis, Harvard University, 1971.
[13] J. R. Stembridge, *Minuscule elements of Weyl groups,* J.Algebra **235**(2001), 722-743.

Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan.
e-mail address : nakada@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp