# Products of character values of some $p$-groups

北海道大学大学院理学院　　翁長 良成

## 1　はじめに

本稿は第 13 回代数学若手研究会において、上記のタイトルで講演した内容についてまとめたものである。

Feit[2] に、Brauer と Wielandt が発見したという、次の定理が紹介されている。

**定理 1.1**　$G$ を有限群、$C_1, \cdots, C_r$ を $G$ のすべての共役類、$\widehat{C_i}$ を群環 $\mathbb{C}[G]$ における $C_i$ の元の総和とする ($i = 1, \cdots, r$)。このとき、次が成り立つ。

$$G = G' \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} \quad s.t. \quad \prod_{i=1}^{r} \widehat{C_i} = \widehat{\alpha G'}.$$

定理にあらわれる $\prod_{i=1}^{r} \widehat{C_i}$ を群環 $\mathbb{C}[G]$ の中心的原始冪等元 $e_j(\chi_j \in \mathrm{Irr}G)$ を用いて書き直せば、

$$\prod_{i=1}^{r} \widehat{C_i} = \sum_{j=1}^{r} \left( \prod_{i=1}^{r} \frac{|C_i|\chi_j(x_i)}{\chi_j(1)} \right) e_j \quad , \quad x_i \in C_i$$

となり、「$\chi$ が $G$ の 1 次でない既約指標ならば、$\chi(x) = 0$ となる $G$ の元 $x$ が存在する」という Burnside の有名な結果から

$$\prod_{i=1}^{r} \widehat{C_i} = \frac{\prod_{i=1}^{r} |C_i|}{|G|} \widehat{G}$$

を得る。従って上の定理においては、$G$ の 1 次でない任意の既約指標 $\chi$ に対して $\chi(x_1) \cdots \chi(x_r) = 0$ という事実が効いていることがわかる。一般の有限群 $G$ に対しても同様にして

$$\prod_{i=1}^{r} \widehat{C_i} = \frac{\prod_{i=1}^{r} |C_i|}{|G'|} \widehat{xG'} \quad , \quad x = x_1 \cdots x_r$$

が成り立つ。ここで注目したいのは、共役類の完全代表系 $x_1, \cdots, x_r$ を取らなければ 1 次でないすべての既約指標 $\chi$ に対して $\chi(x_1) \cdots \chi(x_r) = 0$ が得られない訳ではない、ということである。実際、$G$ を esp 群とすれば、1 次でない任意の既約指標 $\chi$ に対して、$x_i \notin Z(G)$ であれば $\chi(x_i) = 0$ が成り立ち、$\widehat{C_i} = \widehat{x_i G'}$ となる (第二直交関係より)。また、GAP を使えばわかることだが、$G$ が比較的小さな $p$ 群であれば、$G$ は $\widehat{C_{i_1}} \widehat{C_{i_2}} = \frac{|C_{i_1}||C_{i_2}|}{|G|} \widehat{x_{i_1} x_{i_2} G'}$ を満たす相異なる共役類を持つ。つまり、1 次でない任意の既約指標に対して、$\chi(x_{i_1})\chi(x_{i_2}) = 0$ が成り立つ。本稿の主な目的は次の定理を示すことである。

**定理 1.2**　$G$ は 1 次でない既約指標の次数がすべて $p$ であるような $p$ 群であるとする。このとき $G$ は

$$\widehat{C_{i_1}} \widehat{C_{i_2}} = \frac{|C_{i_1}||C_{i_2}|}{|G'|} \widehat{x_{i_1} x_{i_2} G'} \tag{1}$$

を満たす、相異なる共役類 $C_{i_1}, C_{i_2}$ を持つ。

ここで改めて本稿で用いる記号をまとめておく。$G$ は有限群、$r$ は $G$ の共役類 (既約指標) の個数とする。$G$ の共役類を $C_i$ であらわし、その代表元を $x_i$ と書くことにする。さらに $\mathrm{Irr}(G)$ で $G$ の既約指標の全体を、$\mathrm{Lin}(G)$ で $G$ の１次指標の全体をあらわす。c.d.$(G)$ は $G$ の既約指標の次数からなる集合とする。$G$ の任意の部分集合 $S$ に対して $\widehat{S}$ により、群環 $\mathbb{C}[G]$ における $S$ の元の総和をあらわすことにする。

次に、$G$ の不変量 $v(G)$ を

$$v(G) := min\{l \in \mathbb{N} | \chi(x_{i_1}) \cdots \chi(x_{i_l}), \forall \chi \in \mathrm{Irr}(G) \backslash \mathrm{Lin}(G)\}$$

で定義しておく。すると定理 **1.2** の主張は次のようになる。

**定理 1.3** $G$ を $p$ 群とする。c.d.$(G) = \{1, p\}$ であれば $v(G) \leq 2$

## 2 定理 1.2 の証明

１次でない既約指標の次数がすべて $p$ であるような $p$ 群については、次のことが知られている。

**定理 2.1** ([3]) $G$ を非可換な $p$ 群とする。c.d.$(G) = \{1, p\}$ であれば次のいずれかが成り立つ。
(1) $G$ は可換な極大部分群を持つ,
(2) $|G : Z(G)| = p^3$.

最初に $v(G) = 1$ となるための必要十分条件を与えておく。

**補題 2.1** $v(G) = 1$ であることと $|G| = |C_i|$ となる $G$ の元 $x_i$ が存在することとは同値である。

**証明** 第二直交関係より明らかである。 □

**命題 2.1** 有限群 $G$ は、剰余群が巡回群となるような可換な正規部分群 $A$ を持つとする。このとき、$v(G) = 1$ である。

**証明** $G/A = \langle \bar{x} \rangle$ とすると、$\forall g_1, g_2 \in G$ に対して、$g_1 = x^i a_1$、$g_2 = x^j a_2$ と書ける。このとき

$$[g_1, g_2] = \left( \prod_{k=0}^{i-1} [x, {g_2}^{x^k}] \right) \left( \prod_{h=0}^{j-1} [x, {a_1}^{x^h}] \right)^{-1} \in [x, G]$$

となり、$G' = [x, G] = \langle x^{-1} C_x \rangle$。ここで $G/C_G(x)$ の完全代表系として $A/A \cap C_G(x)$ をとることができることに注意すると

$$[x, ab] = [x, b][x, a]^b = [x, a][x, b],$$

$$1 = [x, aa^{-1}] = [x, a][x, a^{-1}]$$

となるから ($\bar{a}, \bar{b} \in A/(A \cap C_G(x))$)、$x^{-1}C_x$ は $[x, G]$ の部分群となり、$|G'| = |C_x|$ を得る。 □

定理 1.2 を示す前に、もうひとつ補題を用意しておく。

**補題 2.2** $G \ni g, h$、$\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$ に対して

$$\chi(g)\chi(h) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{z \in G} \chi(gh^z).$$

**証明**　$\chi$ に対応する既約表現の行列表示を考えれば明らかである。　□

**定理 1.2 の証明**

**命題 2.3** から $G$ は可換な極大部分群を持たないとしてよい。まずは $G/Z(G)$ が可換である場合について考察する。このとき、$G/Z(G)$ は位数 $p^3$ の初等可換群になる。また

$$\exists x_1, x_2 \in G \backslash Z(G) \quad s.t. \quad G' = [x_1, G][x_2, G]$$

となるが、$G/Z(G)$ が可換であることから、$C_G(x_1)$ と $C_G(x_2)$ は共に $G$ の正規部分群となり、

$$G' = [x_1, G][x_2, G] = x_1^{-1} C_1 x_2^{-1} C_2$$

を得る。さて、群環 $\mathbb{C}[G]$ において

$$\widehat{C_1}\widehat{C_2} = \frac{|C_1||C_2|}{|G'|}\widehat{x_1 x_2 G'} + \frac{|C_1||C_2|}{|G|}\sum_{g \in x_1 x_2 G'}\left\{\sum_{\chi(1)\neq 1}\frac{\chi(x_1)\chi(x_2)\chi(g^{-1})}{\chi(1)}\right\} g \tag{2}$$

となるから、問題は $\sum_{\chi(1)\neq 1}\frac{\chi(x_1)\chi(x_2)\chi(g^{-1})}{\chi(1)}$ を計算することに帰着する。補題 2.4 から

$$\sum_{\chi(1\neq 1)}\frac{\chi(x_1)\chi(x_2)\chi(g^{-1})}{\chi(1)} = \frac{1}{|C_2|}\sum_{\bar{z} \in G/C_G(X_2)}\sum_{\chi(1)\neq 1}\chi(x_1 {x_2}^z)\chi(g^{-1})$$

を得る。また、第二直交関係から

$$\sum_{\chi(1)\neq 1}\chi(x_1 {x_2}^z)\chi(g^{-1}) = \begin{cases} |C_G(x_1 {x_2}^z)| - |G : G'| & (x_1 {x_2}^z \sim g) \\ -|G : G'| & (x_1 {x_2}^z \not\sim g) \end{cases}$$

となる。ここで $g \in x_1 x_2 G$ をひとつ固定する。もし任意の $\bar{z} \in G/C_G(x_2)$ に対して、$x_1 {x_2}^z$ と $g$ が共役でなければ、

$$\frac{|C_1||C_2|}{|G|}\sum_{\chi(1)\neq 1}\frac{\chi(x_1)\chi(x_2)\chi(g^{-1})}{\chi(1)} = -\frac{|C_1||C_2|}{|G'|}$$

となり、$C_1 C_2 = x_1 x_2 G'$ に反する。よって、各 $g \in x_1 x_2 G'$ に対して、$x_1 {x_2}^a$ が $g$ と共役になるような $\bar{a} \in G/C_G(x_2)$ が存在する。さらに $x_1 \notin C_G(x_2)$ であるから、$x_1 {x_2}^a$ が $g$ と共役なら $x_1 {x_2}^{a {x_1}^t} (1 \leq t \leq p-1)$ も $g$ と共役である。従って、$\sharp\{\bar{z} \in G/C_G(x_2) | x_1 {x_2}^z \sim g\} \geq p$ となり、

$$\sum_{\chi(1)\neq 1}\frac{\chi(x_1)\chi(x_2)\chi(g^{-1})}{\chi(1)} \geq p^{n-3} - |G : G'|$$

となる。$p^{n-3} - |G : G'| < 0$ であれば、$|G : G'| = p^{n-2}$ となり $v(G) = 1$ を得るから、$p^{n-3} - |G : G'| \geq 0$ としてよい。もし、$p^{n-3} - |G : G'| > 0$ であれば、(2) 式の右辺に現われる項の総数が $|C_1||C_2|$ を越えてしまうので、$\sum_{\chi(1)\neq 1}\frac{\chi(x_1)\chi(x_2)}{\chi}(g^{-1})\chi(1) = 0$ でなければならない。従って、$v(G) \leq 2$ を得る。

次に $G/Z(G)$ が非可換のケースを考える。このとき

$$G/Z(G) = \langle \bar{x}, \bar{y} | \bar{x}^p = \bar{y}^p = [\bar{x}\, bary]^p = 1, [\bar{x}, \bar{y}] \in Z\left(G/Z(G)\right)\rangle$$

となる $x, y \in G$ が存在する。$\alpha := [\bar{x}, \bar{y}]$ とすれば、$G' = \alpha^{-1} C_\alpha x^{-1} C_x$ となる。あとは $G/Z(G)$ が可換の時と同様に、$\widehat{C_\alpha}\widehat{C_x}$ を計算すればよい。　□

## 3　その後の進展

講演の時には、c.d.$(G)=\{1,p\}$ であるような $p$ 群 $G$ を取り扱ったが、現在は c.d.$(G)=\{1,p^k\}(k>1)$ であっても、ほとんどの場合、定理 1.2 が成り立つことがわかっている。c.d.$(G)=\{1,p^k\}(k>1)$ を満たす $p$ 群については Mann[4] にコンパクトにまとめられている。

**定理 3.1** ([4])　$G$ は非可換な $p$ 群で c.d.$(G)=\{1,p^k\}(k>1)$ を満たすとする。このとき $\mathrm{cl}(G)<p$ であって $\exp(G')=\exp(G/Z(G))=p$ となり、次のいずれかが成り立つ。

(1)　$G$ の可換な正規部分群 $A$ で $G/A$ が位数 $p^k$ の初等可換群となるものが存在する,

(2)　$\mathrm{cl}(G)\leq 3$.

ここで $\mathrm{cl}(G)$ は $G$ の巾零クラスを意味する。

Bannuscher[1] の結果を用いると、定理 3.1 の (1) のときは $v(G)=1$ となる。また、定理 3.1 の (2) のとき、$\mathrm{cl}(G)=2$ であれば、$|G|$ に関する帰納法により $v(G)\leq 2$ を示すことが出来る。

最後に、講演のなかでも紹介した、$G$ がパーフェクトであるときの結果を記しておく。

**命題 3.1**　$G=G'$ であれば $v(G)\geq 3$ である.

**証明**　$G=G'$ で $v(G)\leq 2$ であれば

$$\exists x,y\in G \quad s.t. \quad \widehat{C_x}\widehat{C_y}=\frac{|C_x||C_y|}{|G|}\widehat{G}$$

が成り立つ。従って $y=x^{-1}$ と書け、$\widehat{C_x}\widehat{C_y}$ の各項の係数は $\frac{|C_x|^2}{|G|}$ となる。しかし、$\widehat{C_x}\widehat{C_y}$ において、$G$ の単位元 $1_G$ は $|C_x|$ 回しか現われないから矛盾である。　□

## 参考文献


[1] W.Bannuscher, Über Gruppen mit genau zwei irreduziblen Charaktergraden I, II. *Math.Nach.* **154**(1991), 253-263.

[2] W.Feit, *Characters of Finite Groups.* W.A.Benjamin,INC. 1967.

[3] I.M.Isaacs, *Character theory of finite groups.* Academic Press, 1976.

[4] A.Mann, Minimal characters of $p$-groups. *J.Group Theory* **2**(1999), 225-250.