A simple proof of Pommerening's theorem

辻井 健修

大阪市立大学大学院 理学研究科

1. はじめに

昨年、修士論文、第１１回代数学若手研究会にて問題とした Pommerening の定理のより簡潔な証明を与えることに成功した。本稿では、その概略を説明したいと思う。この章では、Pommerening の定理と、その意味する内容などを解説したい。はじめに、表記と定義について述べたいと思う。

$\Bbbk$ を標数 $p \geq 0$ の代数閉体、$\Bbbk^\times = \Bbbk \setminus 0$ とする。$\Bbbk$ 上の線形代数群 G に対して、以下の表記を用いる; G° を G の単位成分 (単位元 e を含む G の既約成分); (G, G) を G の交換子群; $R_u(G)$ を G のユニポテント根基 (unipotent radical); $\mathrm{Z}(G)$ を G の中心; $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ を G のリー環; $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ のベキ零元全体の集合; $Y(G)$ を G の余指標 ($\Bbbk^\times$ から G への代数群の射) 全体の集合; 余指標 0 を自明な余指標 ($\Bbbk^\times$ の全ての元を e に移す余指標) とする。代数多様体、線形代数群の位相は、ザリスキ位相のみを考える。また、G の $\mathfrak{g}$ への作用は、常に随伴作用 (adjoint action) のみを考える。G の $Y(G)$ への作用は、$(g.\lambda)(\xi) = g\lambda(\xi)g^{-1}$、$\mathbb{Z}$ の $Y(G)$ への作用は、$(n\lambda)(\xi) = \lambda(\xi)^n$ $(\xi \in \Bbbk^\times)$ で与える。<u>以下、G は常に $\Bbbk$ 上の連結簡約代数群とする。</u>

1.1. $\mathrm{Z}(G)^\circ$ が $X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ の中心化群 $C_G(X)$ の極大トーラスとなるとき、X を <u>すぐれた (distinguished)</u> ベキ零元と言う。P を G の放物型部分群、$X \in \mathfrak{u}_P := \mathrm{Lie}(R_u(P))$ とする。$\mathrm{Ad}(P)(X)$ が $\mathfrak{u}_P$ において稠密、すなわち、$\overline{\mathrm{Ad}(P)(X)} = \mathfrak{u}_P$ となるとき、X は P の <u>Richardson</u> 元 [*1] とよぶ。次に、すぐれた放物型部分群を定義しよう。B を P のボレル部分群、T を B の極大トーラス、R を T に関する G のルート系とする。R の単純ルート系 Δ を、B のルートが正となるように取ると、P は Δ のある部分集合 I の基本放物型部分群 P_I となっている。$R_I = R \cap \mathbb{Z}I$ とする。$P = P_I$ が <u>すぐれた</u> 放物型部分群 [*2] と言われるのは、次が成立する時である:

$$|\Delta| + |R_I| = \#\{\alpha \in R^+ \mid \text{ある } \alpha_j \in \Delta \setminus I \text{ に対して } \alpha - \alpha_j \in \mathbb{Z}I \text{ を満たす}\}.$$

標数 $p = 0$ の時、または、p が G の最大ルートを単純ルートの線形結合で表した際の任意の係数より大きい時、p は G にとって <u>良い (good)</u> 標数と言う。特に、$p = 0$ または $p > 5$ であれば、良い標数である。

1.2. T を G の極大トーラス、W, R をそれぞれ T に関する G のワイル群、ルート系とする。Δ を R の単純ルート系、$J \subset I \subset \Delta$ を満たし、I の基本レビ部分群 L_I における J の基本放物型部分群 $P_{I,J}$ がすぐれた放物型部分群となるような (I, J) の組全体の集合を $\mathcal{P}(\Delta)$ とおく。また、$P_{I,J}$ の Richardson 元の G 軌道を $\mathcal{O}_{I,J}$ とする。1976 年、Bala と Carter は $\mathfrak{sl}_2$-理論を用いて、次の有名な定理を証明した。

定理 ([BC1], [BC2]) 標数 $p = 0$ または $p > 4h - 2$ [*3] (h は R のコクスター数) であれば、$W.(I, J) \mapsto \mathcal{O}_{I,J}$ により、$\mathcal{P}(\Delta)$ の W-軌道全体から $\mathfrak{g}$ のベキ零軌道全体への全単射が得られる。

[*1] $\mathfrak{g}$ のベキ零軌道が有限個 ([Ja, Thm. 2.8.1]) であることから、G の任意の放物型部分群の Richardson 元の存在が言える ([Ca, Thm. 5.2.3])。実は、良い標数でない場合、ベキ零軌道が有限個であることの統一的証明は知られていない。

[*2] この定義は、T, B の取り方によらない。

[*3] 後に、$p > 3(h - 1)$ でよいことを示している。[Ca, Thm. 5.9.5] を参照。

1.3. その 4 年後の 1980 年、K. Pommerening は、次の定理を証明した:

定理 ([Po1], [Po2]) p が G にとって良い標数であれば、$\mathfrak{g}$ のすぐれたベキ零元 X は、G のあるすぐれた放物型部分群 P の Richardson 元となる。

この Pommerening の定理により、Bala-Carter の定理の主張はよい標数でも成立する、つまり、ベキ零軌道の分類は標数 0 の場合と全く同じになることが分かる ([Ja, Section 4] を参照)。ところが、Pommerening による証明は、単純代数群 G のルート系に応じて場合分けを行い、具体的な計算を必要とする大変な証明であった。

1.4. その Pommerening の定理の、具体的計算を必要としない証明が、2003 年、A. Premet によって与えられた。Premet による証明 ([Pr, Section 2]) を以下、略説しよう。p は G にとって良い標数であると仮定する。Bala-Carter の定理より、$p = 0$ の時は Pommerening の定理が成り立つので、$p > 0$ としてよい。また、$\Bbbk$ を p 進体 $\mathbb{F}_p$ の代数閉包と仮定してよい。$\mathcal{O}_{I,J}$ などは、1.2 の表記を採用する。G と同じルートデータを持つ $\mathbb{C}$ 上の連結簡約代数群 $G_{\mathbb{C}}$ と、その極大トーラス $T_{\mathbb{C}}$ を考え、こちらに対しては、$\mathcal{O}_{\mathbb{C},I,J}$ などの表記を用いることにする。ここで、$Y(T)$ と $Y(T_{\mathbb{C}})$ は同一視できる。

Premet は、2 章で説明をする Kempf-Rousseau 理論といわれるものを用いて、T の余指標の中に、$\mathcal{O}_{I,J}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{C},I,J}$ の両方のある元にとって最適な余指標が存在することを示した。結果として、$\dim \mathcal{O}_{I,J} = \dim \mathcal{O}_{\mathbb{C},I,J}$ を示した。$q = p^N (N \gg 0)$、F を G の N-フロベニウス写像とする。Springer により、$\#\mathcal{N}(\mathfrak{g})^F = q^{\dim G - \operatorname{rank} G}$ であることが示されている。一方、Spaltenstein により、$\mathcal{O}_{I,J}^F = q^{\dim \mathcal{O}_{I,J}} R_{I,J}$ ($R_{I,J}$ は p によらない q の多項式) であることが示されている。よって、$\mathcal{O}_{I,J}^F = q^{\dim \mathcal{O}_{\mathbb{C},I,J}} R_{I,J}$ である。ところが、Bala-Carter の定理により、p が十分大きければ $\#\mathcal{N}(\mathfrak{g})^F = \bigsqcup_{[(I,J)] \in \mathcal{P}(\Delta)/W} \mathcal{O}_{I,J}^F$ を満たすので、$q^{\dim G - \operatorname{rank} G} = \bigsqcup_{[(I,J)] \in \mathcal{P}(\Delta)/W} q^{\dim \mathcal{O}_{\mathbb{C},I,J}} R_{I,J}$ は任意の p に対して成立する q の多項式となる。したがって、良い標数であれば、$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \bigsqcup_{[(I,J)] \in \mathcal{P}(\Delta)/W} \mathcal{O}_{I,J}$ を満たす。以上が Premet による証明の流れである。

1.5. 本稿では、この Premet による証明よりもさらに簡潔な証明 [*4] について解説をする。Premet は、Pommerening の定理における P として、X にとって最適な放物型部分群を取れることを結果的に示している。我々は、その事実を直接示すことに成功した。全体的に証明が易しくなっているが、特に以下の 2 点が大きな違いであると言えよう:

- Premet の証明は、Bala-Carter の定理を必要とする。特に、標数 0、標数が十分大きい場合の、Pommerening の定理の主張を使用しなければならない。我々の証明ではそれらは不要であり、まとめて証明ができる。

- 我々の証明はもとの基礎体上のみで議論が終わるので、有限体上の簡約代数群の理論は不要である。

2. Kempf-Rousseau 理論の概略

この章では、Premet の証明、また、我々の証明でも使用する Kempf-Rousseau 理論 [*5] について解説をする。なお、定理 2.1 以外は線形代数群の理論 [*6] のみで証明できる。この章では、$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を G の V 上の有理表現とし、任意の $g \in G$, $v \in V$ に対して、$g.v = \rho(g)(v)$ と書くことにする。

2.1. $v \in V \setminus 0$, $\lambda \in Y(G)$ とする。$V(i;\lambda) = \{v \in V |$ 任意の $\xi \in \Bbbk^{\times}$ に対して $\lambda(\xi).v = \xi^i v\}$ とおくと、$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V(i;\lambda)$ と表せる。したがって、$v = \sum_{i \in \mathbb{Z}} v_i$ ($v_i \in V(i;\lambda)$) と書ける。V は有限次元であるので、v, λ に対して次が定義できる:

$$m(v, \lambda) = \min\{i \in \mathbb{Z} | v_i \neq 0\}.$$

[*4] 論文は、ホームページ (http://www.geocities.jp/tarjcd/index.html) にて公開している。

[*5] 詳しくは [Sl] を参照されたい。実は、ここで述べるよりも、もっと一般の場合に成立する理論である。それについては、[He] などを参照。

[*6] [Bo], [Hu], [Sp] などを参照。

任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、$m(v, n\lambda) = nm(v, \lambda)$ が成立する。

H を G の閉部分群、$v \in V \setminus 0$ とする。ある $\mu \in Y(H)$ で、$m(v, \mu) > 0$ が成立するとき、v は H-不安定 (unstable) を言う。実は、ρ が随伴表現であれば、次が成り立つ。

命題 $X \in \mathfrak{g} \setminus 0$ とすると、X がベキ零元であることと、G-不安定であることは同値である。

この事実により、ベキ零元に対して Kempf-Rousseau 理論が使えることが分かる。一般に、V の元が G-不安定である同値条件として、次が知られている。

定理[*7] ([Ri1], [Ke]) $v \in V \setminus 0$ であれば、次の条件は同値である:
(i) v は G-不安定である;
(ii) 次数が正の G-不変な V 上の斉次多項式 f は、$f(v) = 0$ を満たす;
(iii) $0 \in \overline{G.v}$ である。

$\lambda \in Y(G)$ とすると、G の放物型部分群 $P(\lambda)$ で、$\mathfrak{p}(\lambda) := \mathrm{Lie}(P(\lambda)) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}(i; \lambda)$ が成立するものがただ一つ存在する。$L(\lambda) = C_G(\mathrm{Im}\,\lambda)$, $U(\lambda) = R_u(P(\lambda))$ とおくと、$\mathfrak{l}(\lambda) := \mathrm{Lie}(L(\lambda)) = \mathfrak{g}(0; \lambda)$, $\mathfrak{u}(\lambda) := \mathrm{Lie}(U(\lambda)) = \bigoplus_{i>0} \mathfrak{g}(i; \lambda)$ を満たす。特に、$P(\lambda) = L(\lambda) \ltimes U(\lambda)$ はレビ分解 (連結簡約代数群とユニポテント根基の半直積) である。また、任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して、$\bigoplus_{i \geq k} V(i; \lambda)$ は $P(\lambda)$-不変であり、$V(k; \lambda)$ は $L(\lambda)$-不変である。

2.2. T を G の極大トーラス、W を T に関する G のワイル群とする。W は有限群であるので、$Y(T) \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 上 W-不変な正定値二次形式 q_W が存在する。包含写像 $T \hookrightarrow G$ は全単射 $Y(T)/W \to Y(G)/G$ を導くので、q_W は G-不変な写像 $q \colon Y(G) \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ を導く。そこで、G-不変な写像 $\| \cdot \| \colon Y(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\lambda \mapsto \sqrt{q(\lambda)}$ を $Y(G)$ 上の ノルム と呼ぶことにする。以下、$\| \cdot \|$ を $Y(G)$ 上のノルムとする。

$v \in V \setminus 0$, $\lambda \in Y(G) \setminus 0$ とする。λ が v にとって 最適 (optimal)[*8] であるとは、次が成立するときを言う:

$$\frac{m(v, \lambda)}{\|\lambda\|} \geq \frac{m(v, \mu)}{\|\mu\|} \qquad (\mu \in Y(G) \setminus 0).$$

λ が他の余指標の 2 倍以上で書けない時、原始的 (primitive) と言う。任意の余指標は、原始的な余指標の整数倍で書ける。また、v にとって最適である余指標の正の整数倍も v にとって最適である。そこで、原始的、かつ、v にとって最適である余指標全体の集合を Λ_v と書くことにする。Kempf-Rousseau 理論の主定理を述べよう。

定理 ([Sl, Satz, Korollar 4.2]) $v \in V \setminus 0$ を G-不安定とする。
(i) Λ_v は空集合でない。
(ii) 任意の $\lambda \in \Lambda_v$ に対して、$P(\lambda)$ は常に一致する。(この G の放物型部分群を、v にとって 最適な 放物型部分群と呼び、$P(v)$ と書く。)
(iii) $P(v)$ は Λ_v に推移的に作用する。
(iv) $C_G(v) \subset P(v)$ を満たす。

$v \in V \setminus 0$ を G-不安定とする。$U(v) = R_u(P(v))$, $\mathfrak{p}(v) = \mathrm{Lie}(P(v))$, $\mathfrak{u}(v) = \mathrm{Lie}(U(v))$ と書くことにする。任意の $\lambda \in \Lambda_v$ に対して、$m(v, \lambda)$ は一致するのでこれを $m(v)$ と書く。$m(v)$ は正の整数である。

2.3. $\lambda \in Y(G) \setminus 0$, T を $\mathrm{Im}\,\lambda$ を含む G の極大トーラスとする。T は $L(\lambda)$ の極大トーラスとなる。$Y(G)$ のノルム $\| \cdot \|$ により、自然に $Y(T) \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 上の正定値な内積 $(\ ,\ )$ が定義される。そこで、$(\mu, \lambda) = 0$ を満たす $\mu \in Y(T)$ の像で生成される T の部分トーラスを T^λ, T^λ と $(L(\lambda), L(\lambda))$ で生成される連結簡約代数群を $L^\perp(\lambda)$[*9] と書く。我々は系 2.3 を示す為に、Kirwan-Ness の定理と言われるものよりも少し強い次の定

[*7] (i) $\Rightarrow$ (ii) は明らか。(ii) $\Rightarrow$ (iii) は簡約代数群が幾何学的簡約であることを用いて示される ([Ri1, Lem. 1.4] を参照)。(iii) $\Rightarrow$ (i) は Hilbert-Mumford 判定法 (criterion) である ([Ke, Thm. 1.4] を参照)。この定理は命題 3.3 の証明の際に必要となるが、2 章では使用しない。

[*8] これは、一般にノルム $\| \cdot \|$ の取り方に依存する。しかし、随伴表現の場合はノルムの取り方に依存しないことが知られている ([He, Thm. 7.2] を参照)。

[*9] $L^\perp(\lambda)$ は極大トーラス T の取り方に依存しない。

理 [*10] を示した。

定理 ([Ta], Thm. 2.7) $v \in V \setminus 0$, $\lambda \in Y(G) \setminus 0$ とする。$k := m(v, \lambda) > 0$ と仮定し、$v = \sum_{i \geq k} v_i$ ($v_i \in V(i; \lambda)$) と書くとき、λ が v にとって最適であることと、v_k が $L^{\perp}(\lambda)$-不安定でないことは同値である。

この事実より、直ちに次が言える。

系 $v \in V \setminus 0$ を G-不安定、$\lambda \in \Lambda_v$, $k = m(v)$ とする。$v = \sum_{i \geq k} v_i$ ($v_i \in V(i; \lambda)$) と書くと、$\Lambda_v = \Lambda_{v_k}$, $P(v) = P(v_k)$ が成立する。

3. Pommerening の定理の新証明

Pommerening の定理を証明する場合、(良い標数の場合に示せればよいので) 次の条件を仮定してよい [*11]:
(H) G の有理表現 ψ であり、$\mathfrak{g}$ でのトレース形式 $(X, Y) \mapsto \mathrm{tr}(d\psi(X) \circ d\psi(Y))$ が非退化となるものが存在する。

そこでこの章では、この (H) を仮定する。

3.1. 初めに、(H) が満たされる時、どのような性質が知られているかを述べよう。

命題 ([Ja], 2.5, Prop. 2.7)
(F) $\mathfrak{g}$ のベキ零軌道は有限個である。
(C) 任意の $Z \in \mathfrak{g}$ に対して、$\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(Z) = \mathrm{Lie}(C_G(Z))$ を満たす。

また、次が成り立つ。

補題 (c.f. [Ja], Lem. 5.7) $\lambda \in Y(G)$ とする。ある $k \in \mathbb{Z}$ に対して $X \in \mathfrak{g}(k; \lambda)$ とすると、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、$[\mathfrak{g}(n-k; \lambda), X] = \mathfrak{g}(n; \lambda)$ であることと $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}(-n;\lambda)}(X) = 0$ であることは同値である。

補題 3.1 を利用するために、$X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \setminus 0$ に対して、次のようなものを考えよう。

$$\Lambda'_X = \{\lambda \in \Lambda_X | X \in \mathfrak{g}(m(X); \lambda)\}.$$

Λ_X は Kempf-Rousseau 理論の主定理より空集合ではないが、Λ'_X は空集合になる可能性 [*12] がある。ところが、系 2.3 を用いることで、(H) を仮定すれば次を示すことができる:

定理 ([Ta], Prop. 3.2) $X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \setminus 0$ とすると、Λ'_X は空集合ではない。

3.2. $X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \setminus 0$, $k = m(X)$, $\lambda \in \Lambda'_X$ とする。(C) と Kempf-Rousseau 理論の主定理より、$\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(X) \subset \mathfrak{p}(X) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}(i; \lambda)$ が言える。特に、任意の正の整数 n に対して、$\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}(-n;\lambda)}(X) = 0$ が言える。ここで、補題 3.1 より、任意の正の整数 n に対して、$[\mathfrak{g}(n-k; \lambda), X] = \mathfrak{g}(n; \lambda)$ が言える。したがって、次が言える:

命題 ([Ta], Prop. 3.2) $\overline{\mathrm{Ad}(P(X))(X)} = \bigoplus_{i \geq k} \mathfrak{g}(i; \lambda)$, $\overline{\mathrm{Ad}(L(\lambda))(X)} = \mathfrak{g}(k; \lambda)$ である。

特に、$0 < i < m(X)$ となる任意の整数 i に対して $\mathfrak{g}(i; \lambda) = 0$ であれば、X は $P(X)$ の Richardson 元である。

3.3. ここまで来れば、Premet による証明をまねることで、次の重要な事実を示すことができる。

命題 $X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \setminus 0$, $\lambda \in \Lambda'_X$ とすると、$C_G(X)^{\circ} = C_{L(\lambda)}(X)^{\circ} \ltimes C_{U(\lambda)}(X)$ はレビ分解である。

[*10] [PV] では、標数 0 であるが、ここで主張している定理にあたるものを Kirwan-Ness の定理と書かれている。実は、当初は別の方法で系 2.3 を示していた。Premet 先生より [PV] を紹介して頂き、定理 2.3 の系として示すことができた。
[*11] 良い標数であれば、G と同じルート系を持つ連結簡約代数群で、(H) を満たすものが存在することが分かっている。$\mathfrak{g}$ のベキ零軌道の分類は基礎体と、ルート系のみに依存するので、取り替えても問題がない。詳しくは [Ta], 4.1 を参照。
[*12] 例えば、G_2 型で標数 3 の時、Λ'_X が空集合となるベキ零元がある。

系 $X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \setminus 0$, $k = m(X)$, $\lambda \in \Lambda'_X$ とする。もし X がすぐれたベキ零元であれば、次が成り立つ:

$$\dim \mathfrak{g}(0;\lambda) = \dim \mathfrak{g}(k;\lambda) + \dim \mathrm{Z}(G).$$

3.4. 最後に、Pommerening による次の事実を利用することで証明が終わる。

命題 (c.f. [Po2, Satz 1.3])[*13] $\lambda \in Y((G,G))$ は原始的とする。T を $\mathrm{Im}\,\lambda$ を含む G の極大トーラス、R を T に関する G のルート系とする。R の単純ルート Δ を、任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $\langle \alpha, \lambda \rangle \geq 0$ が成立するようにとる。ある $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、$\dim \mathfrak{g}(0;\lambda) = \dim \mathfrak{g}(k;\lambda) + \dim \mathrm{Z}(G)$ が成立すると仮定するとき、次が成立する。
(i) $k = 1$ または 2 である。$k = 2$ ならば、$\mathfrak{g}(1;\lambda) = 0$ である。
(ii) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $\langle \alpha, \lambda \rangle \in \{0, k\}$ である. 特に、$P(\lambda)$ はすぐれた放物型部分群である。

0 が $\mathfrak{g}$ のすぐれたベキ零元となるのは G がトーラスの時であるので問題とならない。$X \neq 0$ を $\mathfrak{g}$ のすぐれたベキ零元、$k = m(X)$, $\lambda \in \Lambda'_X$ とする。一般に、$\Lambda_X \subset Y((G,G))$ である ([He], Cor. 7.3 または [Ta], Cor. 2.6 を参照) ので、系 3.3 より、λ に対して命題 3.4 を適用できる。よって、命題 3.2 と合わせることで、X は Richardson 元であり、$P(X) = P(\lambda)$ はすぐれた放物型部分群であることが言える。したがって、Pommerening の定理が示された。

参考文献

[BC1] P. Bala and R. Carter, Classes of unipotent elements in simple algebraic groups I, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **79** (1976), 401-425.

[BC2] P. Bala and R. Carter, Classes of unipotent elements in simple algebraic groups II, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **80** (1976), 1-18.

[Bo] A. Borel: *Linear Algebraic Groups*, 2nd enl. ed. (Graduate Texts in Math. **126**), New York etc. 1991 (Springer).

[Ca] R. W. Carter: *Finite Groups of Lie Type: Conjugacy Classes and Complex Characters* (Pure and applied Math.), Chichester etc. 1985 (Wiley & Sons).

[He] W. H. Hesselink, Uniform instability in reductive groups, *J. Reine Angew. Math.* **303/304** (1978), 74-96.

[Hu] J. E. Humphreys: *Linear Algebraic Groups*, Corr. 5th print (Graduate Texts in Math. **21**), New York etc. 1998 (Springer).

[Ja] J. C. Jantzen: *Nilpotent Orbits in Representation Theory* (in Progress in math. **228**), 2004 (Birkhauser).

[Ke] G. Kempf, Instability in invariant theory, *Ann. of Math.* **108** (1978), 299-316.

[Mc] G. J. McNinch, Nilpotent orbits over ground fields of good characteristic, *Mathematische Annalen* **329** (2004), 49-85.

[Mu] David Mumford, *Geometric Invariant Theory*, (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **34**), 1965 (Springer-Verlag)

[Po1] K. Pommerening, Über die unipotenten Klassen reduktiver Gruppen, *J.Algebra* **49** (1977), 525-536.

[*13] 証明は場合分けを必要としない。しかも、任意の標数で成立する。なぜなら、$\Bbbk$ を複素数体 $\mathbb{C}$ に変えて証明すればよいからである。

[Po2] K. Pommerening, Über die unipotenten Klassen reduktiver Gruppen, II, *J.Algebra* **65** (1980), 373-398.

[Pr] A. Premet, Nilpotent orbits in good characteristic and the Kempf-Rousseau theory, *J. Algebra* **260** (2003), 338-366.

[PV] V. L. Popov, E. B. Vinberg, *Invariant Theory* (Algebraic Geometry IV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **55**), 1994, 123-278 (Springer-Verlag).

[Ri1] R. W. Richardson, Affine coset spaces of reductive algebraic groups, *Bull. London Math. Soc.* **9** (1977), 38-41.

[Ri2] R. W. Richardson, Finiteness theorems for orbits of algebraic groups, *Indag. Math.* **47** (1985), 337-344.

[Sl] P. Slodowy, Die Theorie der optimalen Einparametergruppen fur instabile Vektoren: Algebraic Transformation Groups and Invariant Theory (BMVSeminar, Band13), Basel, 1989, 115-131 (Birkhauser).

[Sp] T. A. Springer: *Linear Algebraic Groups*, 2nd ed. (Progress in Math. **9**), Boston etc. 1998 (Birkhäuser).

[Ta] T. Tsujii, A simple proof of Pommerening's theorem, http://www.geocities.jp/tarjcd/index.html, 2007.