擬ソークルイデアルの定常性について

堀内淳 明治大学理工学研究科

1 はじめに

第 16 回代数学若手研究会において発表した内容と, その研究背景を概説したい．本研究の内容は明治大学の後藤四郎教授との共同研究基づくものである．

以下, $(A, \mathfrak{m})$ により極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ d 次元 Noether 局所環を表す．$Q = (a_1, \cdots, a_d)$ を環 A 内の巴系イデアルとし, $I = Q : \mathfrak{m}^q$ $(q \geq 1)$ とおく．このイデアル I を Q に関する擬ソークルイデアルと呼ぶ. 本報告では，この擬ソークルイデアルの定常性について, 即ちいつ等式 $I^2 = QI$ が成立するか考察する．

研究の背景や主結果を述べるために，まずいくつかの記号と定義を導入する．I を環 A 内の $\mathfrak{m}$ 準素イデアルとし, $\{e_I^i(A)\}_{0 \leq i \leq d}$ でイデアル I の第 i 次 Hilbert 係数を表すことにする．I の Hilbert 函数は整数 n が十分大なるとき，次のように記述される:

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = \mathrm{e}_I^0(A)\binom{n+d}{d} - \mathrm{e}_I^1(A)\binom{n+d-1}{d-1} + \ldots + (-1)^d \mathrm{e}_I^d(A).$$

但し，$\ell_A(M)$ で A 加群 M の長さを表すものとする．

Q を環 A 内の巴系イデアルとする．ここで次の差の値 $\mathbb{I}(Q) = \ell_A(A/Q) - e_Q^0(A)$ を考えよう．ただし, $e_Q^0(A)$ は環 A の Q に関する重複度である．このとき A が Cohen-Macaulay 局所環であることと, $\mathbb{I}(Q) = 0$ が環 A 内のある巴系イデアル, さらに全ての巴系イデアルに対して成立することは同値であることが知られている．上記の差の値 $\mathbb{I}(Q)$ が巴系イデアルのとり方によらず共通の一定値をとるとき，そのような環を Buchsbaum 環と呼ぶ. また, $\sup_Q \mathbb{I}(Q) < \infty$ であるとき，そのような環を generalized Cohen-Macaulay 環または FLC 環と呼ぶ. ただし Q は環 A 内の全ての巴系イデアルを走るものとする．従って, Buchsbaum 環は FLC 環である．この FLC 環の定義は極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する環 A の局所コホモロジー加群 $\mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(A)$ $(i \neq d)$ が有限生成であることと同値である．また，このとき等式 $\sup_Q \mathbb{I}(Q) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell_A(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(A))$ が得られる．

ここで，FLC 環の議論で重要な役割を果たすイデアルを導入したい. 以後, 環 A は FLC 環とする．A 内の巴系イデアル Q は等式 : $\mathbb{I}(Q) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell_A(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(A))$ を満たすとき standard であると呼ぶ．この条件は全ての整数 $n_i > 0$ について, $a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \ldots, a_d^{n_d}$ が任意の順序で d 列をなすここと同値である ([T, Proposition 3.2]).

FLC 環では十分大きい整数 $\ell >> 0$ で $Q \subseteq \mathfrak{m}^\ell$ なる全ての巴系イデアルが standard になるようなものがとれることが知られている ([T, Section 3]).

最後に環 A 内のイデアル I に対して,

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n, \quad \mathrm{G}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}, \quad \mathrm{F}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$$

とおき，それぞれを I の Rees 代数，随伴次数環，ファイバー環と呼ぶ．この準備の下で，第 16 回代数学若手研究会で発表した主結果を述べる．

定理 1.1. *A は FLC 環とし，$\operatorname{depth} \mathrm{G}(\mathfrak{m}) \geq 2$ と仮定する．整数 $\ell \geq 1$ を $\mathfrak{m}^\ell$ に含まれる全ての巴系イデアルが standard となるように取る．このとき各整数 $q \geq 1$ に対して q に依る十分大きな整数 $t = t(q)$ が存在して, $\mathfrak{m}^t$ に含まれる全ての巴系イデアル Q に対して等式 $I^2 = QI$ が成立する．ただし $I = Q : \mathfrak{m}^q$ である．*

ここで [GO, Section 2] と [GN, Section 5] における議論を我々の擬ソークルイデアル $I = Q : \mathfrak{m}^q$ に適用すると次の重要な系が得られる．尚, 定理 1.1 と次の系において $\ell = 1$ ととれば Buchsbaum 環における主張を得ることができる．

系 1.2. A は *FLC* 環とし, $\operatorname{depth} \mathrm{G}(\mathfrak{m}) \geq 2$ とする. 整数 $\ell \geq 1$ を $\mathfrak{m}^\ell$ に含まれる全ての巴系イデアルが *standard* となるように取る. このとき $q \geq \ell$ なる整数 q に対して q に依る十分大きい整数 $t = t(q)$ が存在して, $\mathfrak{m}^t$ に含まれる環 A 内の巴系イデアル Q に対して次の主張が正しい. ただし $I = Q : \mathfrak{m}^q$ である.

(1) I の第 1 *Hilbert* 係数は次のように記述される.

$$\mathrm{e}_I^1(A) = \mathrm{e}_I^0(A) + \mathrm{e}_Q^1(A) - \ell_A(A/I).$$

(2) I の *Hilbert* 函数は, 全ての非負整数 n について, 次の等式で与えられる. $\ell_A(A/I^{n+1}) = \mathrm{e}_I^0(A)\binom{n+d}{d} - \mathrm{e}_I^1(A)\binom{n+d-1}{d-1} + \sum_{i=2}^d (-1)^i \left[\mathrm{e}_Q^{i-1}(A) + \mathrm{e}_Q^i(A)\right] \binom{n+d-i}{d-i}$.

(3) $i < d$ なら, A-加群の同型

$$\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I)) = [\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))]_{1-i} \cong \mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(A)$$

を得る. また,

$$\max\left\{n \in \mathbb{Z} \;\mid\; [\mathrm{H}_M^d(\mathrm{G}(I))]_n \neq (0)\right\} \leq 1 - d$$

である.

(4) 基礎環 A が *Buchsbaum* 環であるならば, I の随伴次数環 $\mathrm{G}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$ は *Buchsbaum* 環である.

ここで, $M = \mathfrak{m}\mathrm{G}(I) + \mathrm{G}(I)_+$ は $\mathrm{G}(I)$ の次数付き極大イデアルであり, $[\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))]_n$ $(i, n \in \mathbb{Z})$ は, $\mathrm{G}(I)$ の M に関する第 i-次局所コホモロジー $\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))$ の n 次斉次成分を表す.

この定理 1.1 と系 1.2 について, いくつかの説明をしたい. 後藤四郎, 櫻井秀人, 著者は [GHS] において, 定理 1.1 と系 1.2 を整数 q は 2 以上の整数であるとして, さらに巴系 $a_1, \cdots, a_d$ において, $a_d = ab$, $a \in \mathfrak{m}^q, b \in \mathfrak{m}$ という条件を課して証明した. この仮定は後藤, 櫻井による補題 ([GSa3, Lemma 2.3]) を使うための技術的なものである. この補題を用いることにより, 巴系イデアル Q を $\mathfrak{m}^{q+l+1}$ からとり, この巴系イデアルに関する擬ソークルイデアル $I = Q : \mathfrak{m}^q$ に関して等式 $I^2 = QI$ が従うことを次元 d に関する帰納法で示した. 詳しくは [GHS] を参照して頂きたい. また, この研究成果については名古屋大学で開催された第 15 回代数学若手研究会において報告した. 第 15 回研究会の報告書 [H] も今一度参照頂ければ幸いである.

本報告では, q は 1 以上の整数とし, さらに t を $q + l + 1$ 以上の整数, 巴系イデアル Q を $\mathfrak{m}^{q+l+1}$ からとる任意のものとして前回の第 15 回代数学若手研究会において発表した主定理 ([H, 定理 2.1]) の一般化を目指すものである.

ここで, 本報告の研究の経緯と背景を説明する. 我々の研究は A. Corso, C. Polini, C. Huneke, W. V. Vasconcelos, 後藤たちによる Cohen-Macaulay 環におけるソークルイデアル $Q : \mathfrak{m}$ の研究にまで遡る.

定理 1.3 ([CHV, CP1, CP2, CPV, G]). A を *Cohen-Macaulay* 局所環, Q は環 A の巴系イデアル, $I = Q : \mathfrak{m}$ はソークルイデアルとする. このとき, 次は同値である.

(1) $I^2 \neq QI$.

(2) Q は A 内で整閉である.

(3) A は正則局所環で, A-加群 $\mathfrak{m}/Q$ は *cyclic* である.

従って, A が正則局所環ではない *Cohen-Macaulay* 局所環なら, 全ての巴系イデアル Q に対し, 等式 $I^2 = QI$ が成立する. ゆえに, I の随伴次数環 $\mathrm{G}(I)$ とファイバー環 $\mathrm{F}(I)$ はどちらも *Cohen-Macaulay* 環である. さらに A の次元が 2 以上なら, *Rees* 代数 $\mathcal{R}(I)$ もまた *Cohen-Macaulay* である.

この結果を踏まえて, 局所環内の擬ソークルイデアルの研究は, その後, 次の 2 つの方向に発展した. 第 1 の方向は基礎環 A に関する仮定を弱めることである. この研究は, 後藤–櫻井により実施された（[GSa1, GSa2, GSa3]）. 彼らは主に Buchsbaum 局所環 A 内のソークルイデアル $I = Q : \mathfrak{m}$ の挙動を解析し, 極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する重複度が $\mathrm{e}_\mathfrak{m}^0(A) \geq 2$

であり，かつ巴系イデアル Q が $\mathfrak{m}$ の十分高い冪に含まれているとき, 等式 $I^2 = QI$ が成立し, 従って I の随伴次数環 $\mathrm{G}(I)$ も Buchsbaum 環であることを示した.

第 2 は，H.-J. Wang [Wan], 後藤, 松岡, 高橋, 木村, H. L. Truong, T. T. Phuong ([GMT, GKM, GKMP, GKPT]) らにより実行された. [GMT] では, 環 A は $\dim A > 0$ であって $\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(A) \geq 3$ なる Gorenstein 局所環であるとして, 擬ソークルイデアル $Q : \mathfrak{m}^2$ が解析された. [GKM, GKMP, GKPT] では，特殊な 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環の場合に，擬ソークルイデアル $Q : \mathfrak{m}^q$ $(q \geq 1)$ の振舞いが研究された. しかしながら, 基礎環の次元が $\dim A \geq 2$ であるとき, 次に挙げる Wang [Wan] の結果及びその手法は，独創的である. 尚, この結果は C. Polini and B. Ulrich [PU] らによる予想に対し, 肯定的な解答を与えている.

定理 1.4 ([Wan])**.** *A は Cohen-Macaulay 局所環とし, $\operatorname{depth} \mathrm{G}(\mathfrak{m}) \geq 2$ とする. $q \geq 1$ は整数とする. Q は A の巴系イデアルとし, $Q \subseteq \mathfrak{m}^{q+1}$ とする. ここで $I = Q : \mathfrak{m}^q$ とすると, 次が正しい.*

$$\mathfrak{m}^q I = \mathfrak{m}^q Q, \quad I \subseteq \mathfrak{m}^{q+1}, \quad I^2 = QI.$$

従って, I の随伴次数環 G(I), ファイバー環 F(I), Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathcal{I})$ は全て Cohen-Macaulay である.

先行する研究 [GHS] とその続きに当たる本報告の研究の契機は, 上記の Wang の定理において, 「基礎環が Cohen-Macaulay 環であるという仮定を外して，定理が成立するか否か」という問いかけにある. 次の第 2 節で本報告の主結果である定理 1.1 と系 1.2 の証明を与える.

2　主定理の証明

これ以降, 特に断りのない限り $(A, \mathfrak{m})$ で d 次元 Noether 局所環を表すものとする. この節の目的は定理 1.1 と系 1.2 を証明することにある. 我々の証明は N.T.Cuong と H.L.Truong らによる結果とその手法 [CT] に基づいている. 彼らは $q = 1$ の場合のみ議論しているが, 彼らの主張とその証明方法は $q \geq 1$ なる場合にも拡張できる. 従って次の主張が正しい. 証明は割愛するが詳しくは [CT] を参照して頂きたい.

定理 2.1 ([CT, Theorem 3.3, Corollary 4.1])**.** *A は FLC 環とし, $q \geq 1$ なる整数とする. このとき, 次が正しい.*

$$\sup_Q \ell_A([Q : \mathfrak{m}^q]/Q) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \ell_A((0) :_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)} \mathfrak{m}^q)$$

但し, Q は A 内の全ての standard な巴系イデアルを動くとする. さらに整数 q に依る $k = k(q) \geq 1$ なる数が存在して, $\mathfrak{m}^k$ に含まれる全ての巴系イデアル Q に対して,

$$\ell_A([Q : \mathfrak{m}^q]/Q) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \ell_A((0) :_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)} \mathfrak{m}^q).$$

が正しい.

次の命題から始める.

命題 2.2. *A は FLC 環とする. $q \geq 1$ なる整数とする. Q を A 内の standard な巴系イデアルとし, 次の等号*

$$\ell_A([Q : \mathfrak{m}^q]/Q) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \ell_A((0) :_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)} \mathfrak{m}^q).$$

を満たすとする. このとき,

$$[Q + W] : \mathfrak{m}^q = [Q : \mathfrak{m}^q] + W$$

が正しい. ここで, $W = \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)$ である.

Proof. $\bar{A} = A/W$ とする．ここで Q は standard な巴系イデアルであるので, $Q \cap W = (0)$ ([T, Corollary 2.3]) である．従って次の完全列

$$0 \to \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A) \to A/Q \xrightarrow{\varepsilon} \bar{A}/Q\bar{A} \to 0,$$

を得る．上の完全列に, $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}^q, *)$ を作用させ, 長さを比較する．$Q\overline{A}$ は $\overline{A}$ の standard な巴系イデアルであるので, $\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\overline{A}) = (0)$ と $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(\overline{A}) = \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)$, $i \geq 1$ に注意すると, 定理 2.1 より, 次の不等式を得る．

$$\begin{aligned}
\ell_A([Q:\mathfrak{m}^q]/Q) &\leq \ell_A((0):_{\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)} \mathfrak{m}^q) + \ell_A([Q\bar{A}:_{\overline{A}} \mathfrak{m}^q]/Q\bar{A}) \\
&\leq \ell_A((0):_{\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)} \mathfrak{m}^q) + \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \ell_A((0):_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(\bar{A})} \mathfrak{m}^q) \\
&= \ell_A((0):_{\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)} \mathfrak{m}^q) + \sum_{i=1}^{d} \binom{d}{i} \ell_A((0):_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)} \mathfrak{m}^q) \\
&\leq \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \ell_A((0):_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)} \mathfrak{m}^q),
\end{aligned}$$

ここで, 仮定 $\ell_A([Q:\mathfrak{m}^q]/Q) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \ell_A((0):_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)} \mathfrak{m}^q)$ より,

$$\ell_A([Q:\mathfrak{m}^q]/Q) = \ell_A((0):_{\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)} \mathfrak{m}^q) + \ell_A([Q\bar{A}:_{\overline{A}} \mathfrak{m}^q]/Q\bar{A})$$

を得る．これは射 $A/Q \xrightarrow{\varepsilon} \bar{A}/Q\bar{A}$ から導かれる射

$$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}^q, \varepsilon) : \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}^q, A/Q) \to \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}^q, \overline{A}/\overline{Q})$$

が全射であることを意味する．故に

$$[Q+W]:\mathfrak{m}^q = [Q:\mathfrak{m}^q] + W.$$

$\square$

次の定理 2.3 は主定理 1.1 の証明の核となる主張である．これは [GSa1, Theorem 3.9] の一般化である．

定理 2.3. *A は FLC 環とする．$q \geq 1$ なる整数とする．Q を A 内の standard な巴系イデアルとし, $I = Q : \mathfrak{m}^q$ とおく．次の 3 条件を仮定する．*

(1) $\ell_A(I/Q) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \ell_A((0):_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)} \mathfrak{m}^q)$.

(2) $\mathfrak{m}^q I = \mathfrak{m}^q Q$.

(3) $I^2 \subseteq Q$.

このとき, 等式 $I^2 = QI$ が成立する．

Proof. まず命題 2.2 より $[Q+W]:\mathfrak{m}^q = [Q:\mathfrak{m}^q]+W = I+W$ である．ただし, $W = \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)$ である．$Q = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$ とおく．等式 $I^2 = QI$ を次元に関する帰納法で示す．

$d = 1$ とする．$\overline{A} = A/W$, $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/W$, $\overline{I} = I\overline{A}$, $\overline{Q} = Q\overline{A}$ と置く．$\overline{\mathfrak{m}}^q \cdot \overline{I} = \overline{\mathfrak{m}}^q \cdot \overline{Q}$ であるので, $\overline{\mathfrak{m}}^q \cdot \overline{I}^n = \overline{\mathfrak{m}}^q \cdot \overline{Q}^n$, $n \in \mathbb{Z}$ となることに注意する．さて $[Q+W]:\mathfrak{m}^q = I+W$ より $\overline{I} = \overline{Q}:\overline{\mathfrak{m}}^q$ を得る．$x \in \overline{I}^2$ をとると, $\overline{I}^2 \subseteq \overline{Q}$ より, $x = a_1 y$, $y \in \overline{A}$ と書ける．$\alpha \in \overline{\mathfrak{m}}^q$ をとる．すると, $a_1(\alpha y) = \alpha x \in \overline{\mathfrak{m}}^q \cdot \overline{I}^2 = \overline{\mathfrak{m}}^q \cdot \overline{Q}^2$ より, $a_1(\alpha y) = a_1^2 z$, $z \in \overline{A}$ を得る．さて $\overline{A}$ は Cohen–Macaulay で a_1 は $\overline{A}$ 正則元であることから $\alpha y \in \overline{Q}$ を得る．$y \in \overline{Q}:\overline{\mathfrak{m}}^q = \overline{I}$ であるから $x = a_1 y \in \overline{Q} \cdot \overline{I}$, つまり $\overline{I}^2 = \overline{Q} \cdot \overline{I}$ を得る．よって, $I^2 \subseteq QI + W$ である．ここで, 仮定 $I^2 \subseteq Q$ と, $W \cap Q = (0)$ であることから $I^2 \subseteq (QI+W) \cap Q = QI$ を得る．

$d \geq 2$ として, $d-1$ まで主張が正しいとせよ．$B = A/(a_1)$ とおく．このとき定理の条件 (1), (2), (3) は環 B の巴系イデアル QB に対しても成立する．条件 (2), (3) については明らかである．B 内で QB が条件 (1) を満たすことを確認す

る．今, $a_1\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)=(0)$ $(0\le i\le d-1)$ と $\ell_A((0):a_1)=\ell_A(W)<\infty$ ([T, Theorem 2.5]) であるので, 次の局所コホモロジー加群の短完全列

$$0\to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)\to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(B)\to \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(A)\to 0$$

$(0\le i\le d-2)$ を得る．従って, 定理 2.1 と上の完全列より次を得る．

$$\begin{aligned}\ell_A(I/Q)&=\ell_A([QB:_B\mathfrak{m}^q]/QB)\\&\le\sum_{i=0}^{d-1}\binom{d-1}{i}\ell_A((0):_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(B)}\mathfrak{m}^q)\\&\le\sum_{i=0}^{d-1}\binom{d-1}{i}\left[\ell_A((0):_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)}\mathfrak{m}^q)+\ell_A((0):_{\mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(A)}\mathfrak{m}^q)\right]\\&=\sum_{i=0}^{d}\binom{d}{i}\ell_A((0):_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)}\mathfrak{m}^q)\\&=\ell_A(I/Q).\end{aligned}$$

従って,

$$\ell_A([QB:_B\mathfrak{m}^q]/QB)=\sum_{i=0}^{d-1}\binom{d-1}{i}\ell_A((0):_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(B)}\mathfrak{m}^q)$$

を得る．確かに QB は B 内で条件 (1) を満たすことを示したので, 帰納法の仮定から $I^2\subseteq QI+(a_1)$ である．さて $x\in I^2$ をとり, $x=y+a_1z$, $y\in QI$, $z\in A$ と表す．$\alpha\in\mathfrak{m}^q$ をとる．このとき, $\mathfrak{m}^qI=\mathfrak{m}^qQ$ に注意すると,

$$\alpha x=\alpha y+a_1(\alpha z)\in Q^2$$

を得る．従って $a_1(\alpha z)\in Q^2$ となる．$a_1,a_2,\ldots,a_d$ は A 内の d 列をなすので ([T, Proposition 3.1]), $a_1(\alpha z)\in(a_1)\cap Q^2=a_1Q$ を得る． $a_1(\alpha z)=a_1v, v\in Q$ とすると $\alpha z-v\in(0):a_1\subseteq W$([T, Theorem 2.5]) である． 従って, $z\in(Q+W):\mathfrak{m}^q=I+W$ を得る．$a_1W=(0)$ であるので, $x=y+a_1z\in QI$．故に $I^2=QI$． □

主定理 1.1 を示すために, もう 1 つ命題 2.4 を挙げる．この命題の証明において, $\operatorname{depth}\mathrm{G}(\mathfrak{m})\ge 2$ という仮定が本質的に使われている．詳しくは [GHS] または [H] を参照して頂きたい．この命題 2.4 は $q=1$ の場合でも成立する．([GHS, Proposition 2.2]), ([H, 命題 3.2]) では $q\ge 2$ と仮定して証明している．$q=1$ の場合の証明は, $q\ge 2$ の場合と証明の手法が完全に異なるので, $q=1$ の場合のみ改めて報告する．

命題 2.4. A は *FLC* 環とし，$\operatorname{depth}\mathrm{G}(\mathfrak{m})\ge 2$ と仮定する．$q\ge 1$ は整数とし, 整数 $\ell\ge 0$ をイデアル $\mathfrak{m}^\ell$ が *standard* となるように取る．$Q=(a_1,a_2,\cdots,a_d)$ は環 A の巴系イデアルであって，$Q\subseteq\mathfrak{m}^{q+\ell+1}$ なるものとする．$I=Q:\mathfrak{m}^q$ とおく．このとき，次の主張が正しい．

$$\mathfrak{m}^qI=\mathfrak{m}^qQ\ ,\qquad I\subseteq\mathfrak{m}^{q+\ell+1}\ ,\qquad I^2\subseteq Q.$$

$q=1$ のときの証明. $q=1$, つまりソークルイデアル $I=Q:\mathfrak{m}$ の場合を考える．まず $\mathfrak{m}I=\mathfrak{m}Q$ なることを示す．そうではないとしよう．このとき ([GSa1, Lemma 2.2]) より $e^0_{\mathfrak{m}}(A)=1$ となる．

基礎環 A は FLC 環で $\dim A\ge\operatorname{depth}A\ge\operatorname{depth}\mathrm{G}(\mathfrak{m})\ge 2$ であることより, A は unmixed である．従って A は正則局所環となる．今 I はソークルイデアルであることを思い出すと $\mathfrak{m}I\subseteq Q$, しかし $\mathfrak{m}I\ne\mathfrak{m}Q$ であるので, Q は I の reduction ではない．よって $I=Q:\mathfrak{m}\not\subseteq\overline{Q}$．$A$ は Gorenstein で, $\ell_A([Q:\mathfrak{m}]/Q)=1$ であるので $Q=\overline{Q}$ を得る．よって, 定理 1.3 より $\mathfrak{m}/Q$ は cyclic$A$–module となるが, $Q\subseteq\mathfrak{m}^{\ell+2}\subseteq\mathfrak{m}^2$ より $\dim A\le 1$ となる．今, $\dim A\ge 2$ なので, これは矛盾.

よって, $\mathfrak{m}I=\mathfrak{m}Q$ を得て, $I=Q:\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{m}^{\ell+3}:\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^{\ell+2}$ となる．また $I\subseteq\mathfrak{m}$ より $I^2\subseteq\mathfrak{m}I\subseteq Q$ である． □

さて, 本報告の主結果である定理 1.1 と系 1.2 の証明をしよう．

Proof of Theorem 1.1 *and Corollary* 1.2. 整数 $\ell \geq 1$ を $\mathfrak{m}^\ell$ に含まれる A 内の全ての巴系イデアルが standard であるように取る．整数 q に対し $k(q)$ を定理 2.1 で得られた数とし, $t(q) = \max\{k(q), q + \ell + 1\}$ とおく．このとき定理 2.3 と命題 2.4 より $Q = (a_1, a_2, \ldots, a_d) \subseteq \mathfrak{m}^t$ なる巴系イデアルと $I = Q : \mathfrak{m}^q$ について $I^2 = QI$ が従う．

さらに, $q \geq \ell$ とすると [GO, Theorem 1.2] の (C_2) 条件が満たされる．実際に, $Q \subseteq \mathfrak{m}^\ell$ かつ $\mathfrak{m}^\ell$ に含まれる A 内の全ての巴系イデアルは standard であるので,

$$(a_1, \ldots, \check{a}_i, \ldots, a_d) : a_i = (a_1, \ldots, \check{a}_i, \ldots, a_d) : \mathfrak{m}^\ell,$$

$1 \leq i \leq d$. ([T, Lemma 1.1]) となることに注意して,

$$\begin{aligned}(a_1, \ldots, \check{a}_i, \ldots, a_d) : a_i &= (a_1, \ldots, \check{a}_i, \ldots, a_d) : \mathfrak{m}^\ell \\ &\subseteq (a_1, \ldots, \check{a}_i, \ldots, a_d) : \mathfrak{m}^q \\ &\subseteq I\end{aligned}$$

よりイデアル $I = Q : \mathfrak{m}^q$ に対して, 系 1.2 の主張 (1), (2) が [GN, Section 5] から従う．また系 1.2 の主張 (3), (4) については [GO, Propositions 2.4, 2.5] からそれぞれ従う．

$\square$

謝辞

第 16 回代数学若手研究集会の世話人の皆さまに，講演の機会を与えていただいたことを感謝致します．また本研究において, 惜しみない援助と研究指導をして下さった後藤四郎教授にこの場を借りて厚く御礼申し上げます.

参考文献

[CHV] A. Corso, C. Huneke, and W. V. Vasconcelos, *On the integral closure of ideals*, Manuscripta Math., **95** (1998), 331–347.

[CP1] A. Corso and C. Polini, *Links of prime ideals and their Rees algebras,* J. Algebra, **178** (1995), 224–238.

[CP2] A. Corso and C. Polini, *Reduction number of links of irreducible varieties,* J. Pure Appl. Algebra, **121** (1997), 29–43.

[CPV] A. Corso, C. Polini, and W. V. Vasconcelos, *Links of prime ideals,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **115** (1994), 431–436.

[CT] N. T. Cuong and H. L. Truong, *Asymptotic behavior of parameter ideals in generalized Cohen–Macaulay modules,* J. Algebra, **320** (2008), 158–168.

[G] S. Goto, *Integral closedness of complete intersection ideals,* J. Algebra, **108** (1987), 151–160.

[GHS] S. Goto, J. Horiuchi and H. Sakurai, *Quasi-socle ideals in Buchsbaum rings*, Nagoya Math. J., **200** (2010), 93–106.

[GKM] S. Goto, S. Kimura, and N. Matsuoka, *Quasi-socle ideals in Gorenstein numerical semigroup rings*, J. Algebra, **320** (2008), 276–293.

[GKMP] S. Goto, S. Kimura, N. Matsuoka, and T. T. Phuong, *Quasi-socle ideals in local rings with Gorenstein tangent cones*, J. Commutative Algebra, **1** (2009), 603–620 .

[GKPT] S. Goto, S. Kimura, T. T. Phuong, and H. L. Truong, *Quasi-socle ideals and Goto numbers of parameters*, J. Pure App. Algebra, **214** (2010), 501–511.

[GMT] S. Goto, N. Matsuoka, and Ryo Takahashi, *Quasi-socle ideals in a Gorenstein local ring,* J. Pure App. Algebra, **212** (2008), 969–980.

[GN] S. Goto and K. Nishida, *Hilbert coefficients and Buchsbaumness of associated graded rings*, J. Pure Appl. Algebra, **181** (2003), 61–74.

[GO] S. Goto and K. Ozeki, *The structure of Sally modules– towards a theory of non-Cohen–Macaulay cases –*, J. Algebra, **324** (2010) 2129–2165.

[GSa1] S. Goto and H. Sakurai, *The equality $I^2 = QI$ in Buchsbaum rings*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **110** (2003), 25–56.

[GSa2] S. Goto and H. Sakurai, *The reduction exponent of socle ideals associated to parameter ideals in a Buchsbaum local ring of multiplicity two*, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 1157–1168.

[GSa3] S. Goto and H. Sakurai, *When does the equality $I^2 = QI$ hold true in Buchsbaum rings?*, Lect. Notes Pure Appl. Math., **244** (2006), 115–139.

[H] 堀内　淳　第 15 回代数学若手研究会 Proceedings

[PU] C. Polini and B. Ulrich, *Linkage and reduction numbers,* Math. Ann., **310** (1998), 631–651.

[T] N. V. Trung, *Toward a theory of generalized Cohen–Macaulay modules*, Nagoya Math. J., **102** (1986), 1–49.

[Wan] H.-J. Wang, *Links of symbolic powers of prime ideals,* Math. Z., **256** (2007), 749–756.