ルート系の部分集合が生成する余次元１の部分空間について

神 吉　知 博[1]　（関東学院大学 工学部）
名 倉　誠　（奈良高専 一般教科）
大 谷　信 一　（関東学院大学 工学部）

1. Introduction

本稿は，第 16 回代数学若手研究会で講演した内容に基づいている．

Φ を既約（かつ被約な）有限次元ユークリッド空間 V のルート系とする（ルート系に関する用語は Bourbaki [1] を参照）．本稿の目標は，Φ の部分集合によって生成される余次元 1 の部分空間（§2 に述べるように，これを "refine された格子" とみなすこともある）を分類することである．§6 で述べるように，このような部分空間の分類は，「Dynkin クイバーに付随する半単純有限概均質ベクトル空間」の分類理論 [5] に動機付けられている．そのような部分空間を異なる集合として数え上げると次のようになる：

Theorem 1.1. ユークリッド空間 V の既約（かつ被約な）ルート系 Φ の部分集合で生成された余次元 1 の部分空間（すなわちコランク 1 の refine された格子）で，集合として異なるものの個数は，次のようになる：

Φ	部分空間の個数
$\mathbb{A}_n$ $(n \geq 2)$	$2^n - 1$
$\mathbb{B}_n$ $(n \geq 2)$	$(3^n - 1)/2$
$\mathbb{C}_n$ $(n \geq 2)$	$(3^n - 1)/2$
$\mathbb{D}_n$ $(n \geq 4)$	$(3^n - n\,2^{n-1} - 1)/2$

$\mathbb{E}_6$	639
$\mathbb{E}_7$	8,821
$\mathbb{E}_8$	440,880
$\mathbb{F}_4$	120
$\mathbb{G}_2$	6

この定理の，古典型に対する主張（左側の表）は Theorems 3.5，4.6，5.1 から直ちに得られる．我々のアプローチは，"ルートを並べて得られる行列の標準形" を観察することである．なお，$\mathbb{G}_2$ 型については自明な主張である．その他の例外型に対する主張（右側の表）は，計算機を用いれば容易に得られる（詳しくは論文 [3] を参照）．

とくに，Φ の Dynkin 図形 Γ が矢印を持たないとき（すなわち simply laced なとき），我々の分類は，Γ に付随する特殊線型群の直積の表現が "有限概均質" であるかどうかの必要十分条件を与える "次元ベクトルの条件" の分類に他ならない．これについては §6 に例を述べる．

---

[1]2011 年 4 月より，松江高専 数理科学科．

2. Preliminaries

Φ を，ユークリッド空間 $V = \mathbb{R}^l$ の既約（かつ被約な）ルート系とする．ベクトル $w_1, w_2, \ldots, w_m \in V$ が生成する $\mathbb{Z}$ 加群，$\mathbb{R}$ 部分空間をそれぞれ L，$(L)_\mathbb{R}$ と表す：

$$L = \langle w_1, w_2, \ldots, w_m \rangle_\mathbb{Z} = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 + \cdots + \mathbb{Z}w_m,$$

$$(L)_\mathbb{R} = \langle w_1, w_2, \ldots, w_m \rangle_\mathbb{R} = \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2 + \cdots + \mathbb{R}w_m.$$

我々は $\mathbb{Z}$ 加群 L を単に**格子**と呼ぶことにする．格子 L のランク，コランクを，対応する部分空間 $(L)_\mathbb{R}$ の次元，余次元として定義する．部分空間 $(L)_\mathbb{R}$ の，$V = \mathbb{R}^l$ の内積に関する直交補空間を $(L)_\mathbb{R}^\perp$ で表す．$(L)_\mathbb{R}$ の余次元が 1 のとき，$(L)_\mathbb{R}^\perp$ の基底を L の（あるいは $(L)_\mathbb{R}$ の）**法線ベクトル**と呼ぶことにしたい．

さて $V = \mathbb{R}^l$ に，その標準基底に関する辞書式順序を入れよう：すなわち，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ の「0 でない最初の成分」が正のとき，$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y}$ とする．ルート系 Φ の正の元（これを正ルートと呼ぶ）全ての集合を Φ^+ で表すことにする．

いま L を，Φ の部分集合から生成される格子としよう．そのランクを $p = \dim(L)_\mathbb{R}$ とし，$\Psi^+ = (L)_\mathbb{R} \cap \Phi^+$ とおく．このとき，p 個の正ルート $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_p$ を次のように選ぶ：

$$\boldsymbol{\alpha}_1 := \min \Psi^+, \text{ and } \boldsymbol{\alpha}_k := \min\bigl(\Psi^+ \setminus \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{k-1} \rangle_\mathbb{R}\bigr) \text{ for } k = 2, 3, \ldots, p.$$

ここで $\Psi = (L)_\mathbb{R} \cap \Phi$ は，$(L)_\mathbb{R}$ のルート系であり，上のように選んだ $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_p$ は辞書式順序に関する Ψ の単純ルート全体に他ならない．我々の結果を半単純有限概均質ベクトル空間の分類に応用するにあたって，次の Lemma は基本的である：

Lemma 2.1. 任意の元 $\boldsymbol{\alpha} \in \Psi^+$ に対して，$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{\alpha}_p$ となるような非負整数 $k_1, k_2, \ldots, k_p$ を選ぶことができる．

上述のベクトル $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_p$ は，格子 L から（辞書式順序を固定しているので）一意的に決まる．そこで，この $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_p$ によって生成される格子を L の細分化 (refinement) と呼び，$\mathrm{Ref}(L)$ で表す（一般に $L \subseteq \mathrm{Ref}(L)$ である）．もし $L = \mathrm{Ref}(L)$ となるとき，L は “refine されている” と言うことにしたい．いくつかの正ルートによってそれぞれ生成される 2 つの格子 L_1，L_2 に対して，$\mathrm{Ref}(L_1) = \mathrm{Ref}(L_2)$ となるための必要十分条件は，$(L_1)_\mathbb{R} = (L_2)_\mathbb{R}$ となることである．とくに L_1 と L_2 がいずれもコランク 1 のときは，この条件は L_1 と L_2 の法線ベクトルが零でない定数倍を除いて一致することと同値である．すなわち，余次元 1 の部分空間（すなわちコランク 1 の refine された格子）は，その法線ベクトルによって分類される．

後で必要となるための用語と記号をいくつか準備しておこう．列ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\operatorname{supp}\boldsymbol{x} = \{i;\ x_i \neq 0\}$ とおく．本稿では, $s(\boldsymbol{x}) = \min\operatorname{supp}\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ の**始点**，$e(\boldsymbol{x}) = \max\operatorname{supp}\boldsymbol{x}$ をその**終点**と呼ぶことにする．列ベクトル $w_1, w_2, \ldots, w_m \in \mathbb{R}^n$ で生成されるベクトル空間を $L(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ で表し，$w_1, w_2, \ldots, w_m$ を並べて作ったサイズ $n \times m$ の行列を $M(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ で表すことにする．

$$L(w_1, w_2, \ldots, w_m) = \langle w_1, w_2, \ldots, w_m \rangle_{\mathbb{R}},\ M(w_1, w_2, \ldots, w_m) = \big[w_1\big|w_2\big|\cdots\big|w_m\big].$$

行列 A に列基本変形を施して行列 A' が得られるとき，$A \simeq A'$ と表すことにする．また，行列 B に列基本変形と行の入れ替えを施して行列 B' が得られるとき，$B \sim B'$ と表すことにする．

サイズ $(n+1) \times (n-1)$ の行列 M が，適当な列基本変形と行の入れ替えによって次のように表せるとき，M は "$\mathbb{A}_n$ 型の可約 (reducible) な行列" と呼ぶことにする（なお，可約でないときは既約と呼ぶ）：

$$M \sim \left[\begin{array}{c|c} X & O \\ \hline O & Y \end{array}\right], \tag{2.1}$$

ここで X のサイズは $(r+1) \times r$，Y のサイズは $(n-r) \times (n-r-1)$ で，$1 \leq r \leq n-2$ とする．同様に，サイズ $n \times (n-1)$ の行列 M が "$\mathbb{D}_n$ 型の可約な行列" とは，M に適当な列基本変形と行の入れ替えを施すことで，(2.1) にのような形（ただし，今度は X は r 次の正方行列で，Y はサイズ $(n-r) \times (n-r-1)$ で，$2 \leq r \leq n-2$ とする）で表せることをいう．なお，誤解のないときには，"$\mathbb{A}_n$ 型の"（あるいは "$\mathbb{D}_n$ 型の"）という語句は省くことにしたい．

行列 A が sincere とは，A が「0 だけからなる行」を持たないことをいう．また，サイズ $m \times n$ の行列 A が $\operatorname{rank} A = \min\{m, n\}$ をみたすとき，A を full-rank な行列と呼ぶことにしたい．

3. $\mathbb{A}_n$ 型の余次元 1 の部分空間

本節では，$\mathbb{A}_n$ 型のルート系を $\Phi^{(n+1)} = \Phi(\mathbb{A}_n)$ で表すことにする．成分が全て 1 のベクトル ${}^t(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ に直交する n 次元部分空間を $E^{(n+1)} = \{\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 0\}$ とおくと，$\Phi^{(n+1)}$ は $E^{(n+1)}$ の有限集合として次のように表せる：

$$\Phi^{(n+1)} = \Phi(\mathbb{A}_n) = \big\{\pm(\boldsymbol{e}_i^{(n+1)} - \boldsymbol{e}_j^{(n+1)}) \in E^{(n+1)};\ 1 \leq i < j \leq n+1\big\},$$

ただし $\boldsymbol{e}_1^{(n+1)}, \boldsymbol{e}_2^{(n+1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n+1}^{(n+1)}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底である．すなわち，

$$\boldsymbol{e}_i^{(n+1)} = {}^t(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (\text{第 } i \text{ 成分が } 1).$$

とくに，$E^{(n+1)}$ の基底として，$\boldsymbol{\alpha}_i^{(n+1)} = \boldsymbol{e}_i^{(n+1)} - \boldsymbol{e}_{i+1}^{(n+1)}$（$i = 1, 2, \ldots, n$）を選ぶことができる．これらは $\Phi^{(n+1)}$ の単純ルートである．

Lemma 3.1. n 個のベクトル $w_1, w_2, \ldots, w_n \in E^{(n+1)}$ を並べたサイズ $(n+1) \times n$ の行列を $M = M(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ とおく．もし M が full-rank ならば，部分空間 $L(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ の基底として単純ルート $\boldsymbol{\alpha}_1^{(n+1)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(n+1)}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n^{(n+1)}$ を選ぶことができる．とくに，$M \simeq M(\boldsymbol{\alpha}_1^{(n+1)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(n+1)}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n^{(n+1)})$ である．

部分集合 $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n+1\}$ に対して，射影 $\pi_I : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{\sharp I}$ を $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^{n+1} \mapsto (x_i)_{i \in I}$ によって定義する．また，部分集合 $\Phi_I^{(n+1)} \subset \Phi^{(n+1)}$ を次のように定める：

$$\Phi_I^{(n+1)} = \bigl\{ w \in \Phi^{(n+1)};\ s(w) \in I \text{ and } e(w) \in I \bigr\}. \tag{3.1}$$

ここで，射影 π_I は全単射 $\Phi_I^{(n+1)} \to \Phi^{(\sharp I)}$ を誘導することに注意しておこう．

Proposition 3.2. $n-1$ 個のルート $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1} \in \Phi^{(n+1)}$ を並べたサイズ $(n+1) \times (n-1)$ の行列を $M = M(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})$ とする．もし M が sincere ではないが full-rank ならば，次のように表せる：

$$M \sim \left[\begin{array}{c} M(\boldsymbol{\alpha}_1^{(n)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(n)}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{(n)}) \\ \hline O \end{array} \right].$$

ここで $\boldsymbol{\alpha}_1^{(n)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(n)}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{(n)}$ は $\Phi^{(n)} = \Phi(\mathbb{A}_{n-1})$ の単純ルートで，O は零行列とする．

Proof. 仮定により，行列 M には「成分が 0 だけの行」がある．それを第 i 行としよう．いま $I = \{1, 2, \ldots, n+1\} \setminus \{i\}$ とおき，射影 $\pi_I : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ を考える．このときサイズ $n \times (n-1)$ の行列 $M\bigl(\pi_I(w_1), \pi_I(w_2), \ldots, \pi_I(w_{n-1})\bigr)$ は full-rank で，しかも各列 $\pi_I(w_k)$ は $\Phi^{(n)} \subset E^{(n)}$ に含まれる．したがって Lemma 3.1 から，主張が得られる． □

Lemma 3.3. $n \geq 3$ とする．$n-1$ 個のルート $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1} \in \Phi^{(n+1)}$ に対して，$M = M(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})$ とおく．もし M が full-rank かつ sincere ならば，M は可約 (reducible) である．

Proof. $n=3$ のときには（ルートは 12 個しかないから）主張が正しいことがすぐ確かめられる．そこで $n \geq 4$ としよう．まず，適当な列基本変形と行の入れ替えによって M を次のような形で表すことができる：

$$M \sim M(\boldsymbol{e}_1^{(n+1)} - \boldsymbol{e}_2^{(n+1)},\, w_2',\, w_3',\, \ldots,\, w_{n-1}'), \tag{3.2}$$

ここで w_k' たちは $\Phi^{(n+1)}$ の元で，$s(w_k') \geq 2$（$k=2,3,\ldots,n-1$）をみたす．すなわち (3.2) の右辺の第 1 行は，$(1,1)$ 成分以外は 0 である．

このとき，部分集合 $R=\{2,3,\ldots,n+1\}$ に対して，サイズ $n \times (n-2)$ の行列 $M' = M\big(\pi_R(w_2'), \pi_R(w_3'), \ldots, \pi_R(w_{n-1}')\big)$ を考える．もし M' が sincere でなければ，M が sincere ゆえ $s(w_k') \geq 3$ となる．すなわち M は可約である．M' が sincere のときは，M' 自身が可約であることが帰納的にわかる．したがってこの場合も M は可約である． □

Proposition 3.4. $n \geq 3$ とする．$n-1$ 個のルート $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1} \in \Phi^{(n+1)}$ に対して，$M = M(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})$ とおく．もし M が full-rank かつ sincere ならば，次のように表せる：

$$M \sim M(\boldsymbol{\alpha}_1^{(n+1)},\, \boldsymbol{\alpha}_2^{(n+1)},\, \ldots,\, \boldsymbol{\alpha}_r^{(n+1)},\, \boldsymbol{\alpha}_{r+2}^{(n+1)},\, \ldots,\, \boldsymbol{\alpha}_n^{(n+1)}).$$

Proof. まず Lemma 3.3 より M は可約であるから，適当な列基本変形と行の入れ替えによって M を (2.1) のように表せる．ただし (2.1) の右辺の X はサイズ $(r+1)\times r$ であり，Y はサイズ $(n-r)\times(n-r-1)$ で，$1 \leq r \leq n-2$ である．しかもこの X と Y はいずれも full-rank である．しかも (2.1) の右辺の各列は $E^{(n+1)}$ の元であるから，行列 X，Y の各列はそれぞれ $E^{(r+1)}$，$E^{(n-r)}$ の元である．そこで Lemma 3.1 をこの X と Y にそれぞれ適用することで，主張が得られる． □

Theorem 3.5. ルート $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1} \in \Phi^{(n+1)} = \Phi(\mathbb{A}_n)$ によって張られる余次元 1 の部分空間を $L = L(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})$ とし，$M = M(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})$ とおく．

(1) M が sincere でなければ，ある番号 $i \in \{1,2,\ldots,n+1\}$ を選んで L を次のように表すことができる：

$$L = L\big(\pi_I^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1^{(n)}),\, \pi_I^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_2^{(n)}),\, \ldots,\, \pi_I^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_n^{(n)})\big),$$

ここで $I = \{1,2,\ldots,n+1\} \setminus \{i\}$ とおいた．L の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_L \in E^{(n+1)}$ は 2 つの条件によって決まる：

$$\pi_I(\boldsymbol{n}_L) = {}^t(1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n \text{ and } \pi_{\{i\}}(\boldsymbol{n}_L) = (-n) \in \mathbb{R}^1.$$

(2) M が sincere のとき，部分集合 $R \subset \{1,2,\dots,n+1\}$（ただし $\sharp R = r+1$ で $r=1,2,\dots,n-2$）を選んで，L を次のように表すことができる：

$$L = L\big(\pi_R^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1^{(r+1)}),\ \dots,\ \pi_R^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_r^{(r+1)}),\ \pi_S^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1^{(s+1)}),\ \dots,\ \pi_S^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_s^{(s+1)})\big),$$

ここで $S = \{1,2,\dots,n+1\} \setminus R$, $s = n-r-1$ とおいた．L の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_L \in E^{(n+1)}$ は次の 2 つの条件によって決まる：

$$\pi_R(\boldsymbol{n}_L) = {}^t(s+1,\dots,s+1) \in \mathbb{R}^{r+1} \text{ and } \pi_S(\boldsymbol{n}_L) = -{}^t(r+1,\dots,r+1) \in \mathbb{R}^{s+1}.$$

Proof. この主張は Proposition 3.2 と 3.4 から直ちに得られる． □

したがって，余次元 1 の部分空間で集合として異なるものの個数は，次の式で与えられる：

$$(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n+1}{r+1} = 2^n - 1.$$

4. $\mathbb{D}_n$ 型の余次元 1 の部分空間

本節では，$\mathbb{D}_n$ 型のルート系を $\Phi^{(n)} = \Phi(\mathbb{D}_n)$ で表すことにする．これは，$\mathbb{R}^n$ 内の有限集合として次のように表せる：

$$\Phi^{(n)} = \Phi(\mathbb{D}_n) = \big\{\pm(\boldsymbol{e}_i^{(n)} \pm \boldsymbol{e}_j^{(n)});\ 1 \le i < j \le n\big\}.$$

ここで $\boldsymbol{e}_1^{(n)}, \boldsymbol{e}_2^{(n)}, \dots, \boldsymbol{e}_n^{(n)}$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底であり，とくに $\mathbb{R}^n$ の基底として，ルート

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{(n)} = \boldsymbol{e}_1^{(n)} - \boldsymbol{e}_2^{(n)}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{(n)} = \boldsymbol{e}_{n-1}^{(n)} - \boldsymbol{e}_n^{(n)}, \quad \boldsymbol{\alpha}_n^{(n)} = \boldsymbol{e}_{n-1}^{(n)} + \boldsymbol{e}_n^{(n)}$$

を選ぶことができる．これらは $\Phi^{(n)}$ の単純ルートである．

Lemma 4.1. n 個のベクトル $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$ を並べたサイズ $n \times n$ の行列を $M = M(w_1, w_2, \dots, w_n)$ とする．もし M が正則（すなわち full-rank）ならば，部分空間 $L(w_1, w_2, \dots, w_n)$ の基底として単純ルート $\boldsymbol{\alpha}_1^{(n)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(n)}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n^{(n)}$ が選べる．とくに，$M \simeq M(\boldsymbol{\alpha}_1^{(n)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(n)}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n^{(n)})$ と表せる．

部分集合 $I \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ に対して，射影 $\pi_I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\sharp I}$ を $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^n \mapsto (x_i)_{i \in I}$ によって定義し，部分集合 $\Phi_I^{(n)} \subset \Phi^{(n)}$ を (3.1) と同様に定めると，（$\mathbb{A}_n$ 型の場合と同様に）射影 π_I は全単射 $\Phi_I^{(n)} \to \Phi^{(\sharp I)}$ を誘導する．次の命題は Proposition 3.2 と同様に証明できる．

Proposition 4.2. $n-1$ 個のルート $w_1, w_2, \dots, w_{n-1} \in \Phi^{(n)}$ を並べたサイズ $n \times (n-1)$ の行列を $M = M(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$ とおく．もし M が sincere ではないが full-rank であるとき，次のように表せる：

$$M \sim \left[\begin{array}{c} M(\boldsymbol{\alpha}_1^{(n-1)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(n-1)}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{(n-1)}) \\ \hline O \end{array}\right],$$

ただし $\boldsymbol{\alpha}_1^{(n-1)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(n-1)}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{(n-1)}$ は $\Phi^{(n-1)} = \Phi(\mathbb{D}_{n-1})$ の単純ルートである．

Lemma 4.3. $n \geq 4$ とする．$n-1$ 個のルート $w_1, w_2, \dots, w_{n-1} \in \Phi^{(n)}$ に対して，$M = M(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$ が full-rank かつ sincere とする．もし $s(w_1) = s(w_2)$ かつ $e(w_1) = e(w_2)$ であれば，M は可約である．

Proof. 仮定から，適当に行を入れ替えることにより，M を次のように表せる：

$$M \sim \left[\begin{array}{c|c} X & Z \\ \hline O & Y \end{array}\right] \quad \text{（ただし } X \text{ は 2 次の正方行列）.}$$

ここで X は正則であるから，さらに列基本変形によって $Z = O$ とできる． $\square$

Proposition 4.4. $n \geq 4$ とする．$n-1$ 個のルート $w_1, w_2, \dots, w_{n-1} \in \Phi^{(n)}$ に対して，$M = M(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$ が full-rank, sincere かつ既約とする．このとき，部分空間 $L = L(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$ の基底として $v_k = \boldsymbol{e}_k^{(n)} - \boldsymbol{e}_{k+1}^{(n)}$ または $\boldsymbol{e}_k^{(n)} + \boldsymbol{e}_{k+1}^{(n)}$ という形の正ルート $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ を選ぶことができる．とくに，$M \simeq M(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ である．

Proof. まず，適当に列を入れ替えることにより，$1 \leq s(w_1) \leq s(w_2) \leq \cdots \leq s(w_{n-1}) \leq n-1$ であると仮定してよい．もし $s(w_i) = s(w_{i+1})$ となる番号 i があれば，仮定と Lemma 4.3 により $e(w_i) \neq e(w_{i+1})$ である．そこで（符号 $\pm$ をうまく選んで）$w'_{i+1} = w_i \pm w_{i+1} \in \Phi^{(n)}$ とおくと $s(w_i) < s(w'_{i+1})$ であり，M の第 $i+1$ 列を w'_{i+1} で置き換えた行列 $M(w_1, \dots, w_i, w'_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_{n-1})$ も既約である．したがって，L の基底 $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ は $1 \leq s(w_1) < s(w_2) < \cdots < s(w_{n-1}) \leq n-1$ をみたすと仮定してよい．このとき必然的に $s(w_k) = k$ （$k = 1, 2, \dots, n-1$）となる．しかも $e(w_{n-1}) = n$ であり $w_{n-1} \in \Phi^{(n)}$ なので，$w_{n-1} = \pm \boldsymbol{e}_{n-1}^{(n)} \pm \boldsymbol{e}_n^{(n)}$ という形である．そこで $n-2$ 個のベクトル $w'_k \in \Phi^{(n)}$（$k = 1, 2, \dots, n-2$）で $s(w'_k) = k$ かつ $e(w'_k) \leq n-1$ をみたすものを改めて選べば（列の基本変形をしたことになるので），$w'_1, w'_2, \dots, w'_{n-2}, w_{n-1}$ は L の基底である．このとき $e(w'_{n-2}) = n-1$ であるから，$w'_{n-2} = \pm \boldsymbol{e}_{n-2}^{(n)} \pm \boldsymbol{e}_{n-1}^{(n)}$ の形である．この操作を繰り返し，必要なら適当な列を (-1) 倍することによって，主張が得られる． $\square$

Proposition 4.5. $n-1$ 個のルート $w_1, w_2, \dots, w_{n-1} \in \Phi^{(n)}$ を並べた行列を $M = M(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$ とする．もし M が full-rank，sincere かつ可約ならば，適当な列基本変形と行の入れ替えによって M を次のように表すことができる：

$$M \sim \left[\begin{array}{c|c} M(\boldsymbol{\alpha}_1^{(r)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(r)}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r^{(r)}) & O \\ \hline O & M(v_1, v_2, \dots, v_{n-r-1}) \end{array}\right],$$

ここで $\boldsymbol{\alpha}_k^{(r)}$ たちは $\Phi^{(r)}$ の単純ルートであり，各 v_k は $\boldsymbol{e}_k^{(n-r)} + \boldsymbol{e}_{k+1}^{(n-r)}$ または $\boldsymbol{e}_k^{(n-r)} - \boldsymbol{e}_{k+1}^{(n-r)} \in \Phi^{(n-r)}$ のいずれかである．

Proof. 仮定より M は可約なので (2.1) のように表せる．ただし (2.1) の X は r 次の正則行列，Y はサイズ $(n-r) \times (n-r-1)$ であり，$2 \le r \le n-2$ である．しかも Y は full-rank，sincere かつ既約と仮定してよい．すると Lemma 4.1 より $X \simeq M(\boldsymbol{\alpha}_1^{(r)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(r)}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r^{(r)})$ となる．一方，Y の列ベクトルで生成される部分空間は，$\Phi^{(n-r)}$ の元によって生成される部分空間に他ならない．したがって Proposition 4.4 から主張が得られる． □

Theorem 4.6. ルート $w_1, w_2, \dots, w_{n-1} \in \Phi^{(n)} = \Phi(\mathbb{D}_n)$ で張られる余次元 1 の部分空間を $L = L(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$ とし，$M = M(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$ とおく．

(1) M が sincere でなければ，ある番号 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ を選んで L を次のように表すことができる：

$$L = L\big(\pi_I^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1^{(n-1)}),\, \pi_I^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_2^{(n-1)}),\, \dots,\, \pi_I^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{(n-1)})\big),$$

ここで $I = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$ とおいた．L の法線ベクトルは $\boldsymbol{e}_i^{(n)}$ である．

(2) M が sincere かつ既約ならば，L は次のように表すことができる：

$$L = L\big(v_1,\, v_2,\, \dots,\, v_{n-1}\big),$$

ここで v_k は，$\boldsymbol{e}_k^{(n)} + \boldsymbol{e}_{k+1}^{(n)}$ または $\boldsymbol{e}_k^{(n)} - \boldsymbol{e}_{k+1}^{(n)} \in \Phi^{(n)}$ のいずれかの形である．法線ベクトルは $\boldsymbol{n}_L = {}^t(1, \pm1, \pm1, \dots, \pm1) \in \mathbb{R}^n$ の形で，符号 $\pm$ は条件 ${}^t\boldsymbol{n}_L v_k = 0$（$k = 1, 2, \dots, n-1$）によって決まる．

(3) M が sincere かつ可約ならば，部分集合 $R \subset \{1, 2, \dots, n\}$（ただし $\sharp R = r$, $r = 2, 3, \dots, n-2$）を選んで L を次のように表すことができる：

$$L = L\big(\pi_R^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1^{(r)}), \dots, \pi_R^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_r^{(r)}),\, \pi_S^{-1}(v_1), \dots, \pi_S^{-1}(v_{s-1})\big),$$

ここで $S=\{1,2,\ldots,n\}\setminus R$, $s=n-r$ とおいた．各 v_k は $\boldsymbol{e}_k^{(s)}+\boldsymbol{e}_{k+1}^{(s)}$ または $\boldsymbol{e}_k^{(s)}-\boldsymbol{e}_{k+1}^{(s)}\in\Phi^{(s)}$ のいずれかの形である．法線ベクトル $\boldsymbol{n}_L\in\mathbb{R}^n$ は条件

$$\pi_R(\boldsymbol{n}_L)={}^t(0,\,0,\,\ldots,\,0)\in\mathbb{R}^r,\quad \pi_S(\boldsymbol{n}_L)={}^t(1,\,\pm1,\,\ldots,\,\pm1)\in\mathbb{R}^s,$$

かつ ${}^t\pi_S(\boldsymbol{n}_L)v_k=0$（$k=1,2,\ldots,s-1$）によって決まる．

Proof. この主張は Proposition 4.2，4.4 および 4.5 から直ちに得られる． □

したがって，余次元 1 の部分空間で集合として相異なるものの個数は，次の式で与えられる：

$$n+2^{n-1}+\sum_{r=2}^{n-2}\binom{n}{r}\times 2^{n-r-1}=\frac{1}{2}(3^n-n\cdot 2^{n-1}-1).$$

5. $\mathbb{B}_n$ 型・$\mathbb{C}_n$ 型の余次元 1 の部分空間

$\mathbb{B}_n$ 型，$\mathbb{C}_n$ 型のルート系の部分集合によって生成される余次元 1 の部分空間を分類は，$\mathbb{D}_n$ 型とほぼ同様にできる．そこで，本稿では結果だけを述べることにしたい（詳しくは [3] を参照）．

Theorem 5.1. $n\geq 2$ とし，$\Phi^{(n)}$ を $\mathbb{B}_n$ 型または $\mathbb{C}_n$ 型のルート系とする．ルート $w_1,w_2,\ldots,w_{n-1}\in\Phi^{(n)}$ によって張られる余次元 1 の部分空間を $L=L(w_1,w_2,\ldots,w_{n-1})$ とし，$M=M(w_1,w_2,\ldots,w_{n-1})$ とおく．

(1) M が sincere でなければ，ある番号 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ を選んで L を次のように表すことができる：

$$L=L\big(\pi_I^{-1}(\boldsymbol{e}_1^{(n-1)}),\,\pi_I^{-1}(\boldsymbol{e}_2^{(n-1)}),\,\ldots,\,\pi_I^{-1}(\boldsymbol{e}_{n-1}^{(n-1)})\big),$$

ここで $I=\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i\}$ である．L の法線ベクトルは $\boldsymbol{e}_i^{(n)}$ である．

(2) M が sincere かつ既約ならば，L は次のように表すことができる：

$$L=L\big(v_1,\,v_2,\,\ldots,\,v_{n-1}\big),$$

ここで v_k は，$\boldsymbol{e}_k^{(n)}+\boldsymbol{e}_{k+1}^{(n)}$ または $\boldsymbol{e}_k^{(n)}-\boldsymbol{e}_{k+1}^{(n)}\in\Phi^{(n)}$ のいずれかの形である．法線ベクトルは $\boldsymbol{n}_L={}^t(1,\,\pm1,\,\pm1,\,\ldots,\,\pm1)\in\mathbb{R}^n$ の形で，符号 $\pm$ は条件 ${}^t\boldsymbol{n}_Lv_k=0$（$k=1,2,\ldots,n-1$）によって決まる．

(3) M が sincere かつ可約ならば，部分集合 $R\subset\{1,2,\ldots,n\}$（ただし $\sharp R=r$ で $r=1,2,\ldots,n-2$）を選んで L を次のように表すことができる：

$$L=L\big(\pi_R^{-1}(\boldsymbol{e}_1^{(r)}),\ldots,\pi_R^{-1}(\boldsymbol{e}_r^{(r)}),\,\pi_S^{-1}(v_1),\ldots,\pi_S^{-1}(v_{s-1})\big),$$

ここで $S=\{1,2,\dots,n\}\setminus R$, $s=n-r$ とおいた．v_k は，$\boldsymbol{e}_k^{(s)}+\boldsymbol{e}_{k+1}^{(s)}$ または $\boldsymbol{e}_k^{(s)}-\boldsymbol{e}_{k+1}^{(s)}\in\Phi^{(s)}$ のいずれかの形である．法線ベクトル $\boldsymbol{n}_L\in\mathbb{R}^n$ は条件

$$\pi_R(\boldsymbol{n}_L)={}^t(0,\,0,\,\dots,\,0)\in\mathbb{R}^r,\quad \pi_S(\boldsymbol{n}_L)={}^t(1,\,\pm1,\,\dots,\,\pm1)\in\mathbb{R}^s,$$

かつ ${}^t\pi_S(\boldsymbol{n}_L)v_k=0$（$k=1,2,\dots,s-1$）によって決まる．

こうして，余次元 1 の部分空間で集合として相異なるものの個数は，($\mathbb{B}_n$ 型，$\mathbb{C}_n$ 型いずれも同じ）次の式で与えられる：

$$n+2^{n-1}+\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}\times 2^{n-r-1}=\frac{1}{2}(3^n-1).$$

6. 半単純有限概均質ベクトル空間の分類への応用

本節では，まずクイバーに付随する表現について復習し，後半では，本稿で述べた定理の，半単純有限概均質ベクトル空間の分類への応用する一つの例を解説する．

$Q=(Q_0,Q_1)$ をクイバーとする．ここで Q_0，Q_1 はそれぞれ頂点，矢の有限集合とする．このとき，n 個（頂点の個数を n とする）の非負整数の組（これを次元ベクトルと呼ぶ）$\boldsymbol{d}=(d_i)_{i\in Q_0}\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対して，一般線型代数群の直積 $G_{\boldsymbol{d}}=\prod_{i\in Q_0}GL(d_i)$ はベクトル空間 $R_{\boldsymbol{d}}(Q)=\bigoplus_{s\to t \text{ in } Q}M(d_t,d_s)$ に自然に作用する（例えば [2, §2] を参照）．この表現 $(G_{\boldsymbol{d}},R_{\boldsymbol{d}}(Q))$ を，クイバー Q に**付随する表現**と呼ぶことにする．また，次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ の各成分が正のとき，sincere と呼ぶことにする．一方，各点 $v\in R_{\boldsymbol{d}}(Q)$ はクイバー Q の表現と呼ばれることもある（このとき次元ベクトルを $\mathbf{dim}\,v=\boldsymbol{d}$ などと表す）．すなわち，v の $R_{\boldsymbol{d}}(Q)$ における $G_{\boldsymbol{d}}$ 軌道とは，Q の表現 v の同型類に他ならない．

クイバー $Q=(Q_0,Q_1)$ に対して，その $\mathbb{Z}^n$ 上の 2 次形式は，$q_Q(\boldsymbol{x})=\sum_{i\in Q_0}{x_i}^2-\sum_{s\to t \text{ in } Q}x_sx_t$（ただし $\boldsymbol{x}=(x_i)_{i\in Q_0}\in\mathbb{Z}^n$）によって定義される（これは Q の矢の向きにはよらない）．整数成分のベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^n$ が $q_Q(\boldsymbol{x})=1$ をみたすとき，Q のルートと呼ばれる．また Q のルート $\boldsymbol{x}$ が正 (positive) とは，$\boldsymbol{x}$ の各成分が非負であることをいう．いま Q の正ルートすべての集合を Φ_Q で表す．Kac の定理によって，Q の直既約表現 v に対し，その次元ベクトル $\mathbf{dim}\,v$ は正ルートになる．とくに，Q が Dynkin クイバー（すなわち，Q の基礎グラフが $\mathbb{A}_n$ 型，$\mathbb{D}_n$ 型，$\mathbb{E}_6$ 型，$\mathbb{E}_7$，または $\mathbb{E}_8$ 型のいずれか）のとき Φ_Q は有限集合で，写像 $\mathbf{dim}$ は，直既約表現の同型類全体の集合と Q の正ルート全体の集合の間の全単射を与える（Gabriel の定理）．このとき，次元ベクトルが $\boldsymbol{d}$ である表現 $(G_{\boldsymbol{d}},R_{\boldsymbol{d}}(Q))$ は有限個の $G_{\boldsymbol{d}}$ 軌道を持つ．したがってこれは有限概均質ベクトル空間（finite prehomogeneous vector space，以下 FP と略す）になる．

ところが，“スカラー無し表現”（すなわち群の作用を特殊線型群の直積 $S_{\boldsymbol{d}} = \prod_{i \in Q_0} SL(d_i)$ に制限すると）$R_{\boldsymbol{d}}(Q)$ は無限個の $S_{\boldsymbol{d}}$ 軌道を持つこともある．Dynkin クイバー Q に対して，スカラー無し表現 $(S_{\boldsymbol{d}}, R_{\boldsymbol{d}}(Q))$ が FP であるかどうかは，Q の正ルートによって生成されるコランク 1 の refine された格子を使って特徴付けることができる．より正確には，次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ に対して，対応するスカラー無し表現 $(S_{\boldsymbol{d}}, R_{\boldsymbol{d}}(Q))$ が FP であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{d}$ が Q の線型独立な $n-1$ 個の張る非負整数係数格子点であることである [5, Theorem 3.4]．本稿の Lemma 2.1 にも述べたように，そのような次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ は，コランク 1 の refine された格子に含まれる．こうして，そのような $\boldsymbol{d}$ を特徴付ける（分類する）ためには，Q の正ルートが張るコランク 1 の refine された格子を分類すれば十分である．本稿の §2 で述べたように，それぞれの格子は，その法線ベクトルによって決まる．

さて，一つの例を与えよう．Q を $\mathbb{A}_4$ 型のクイバーとし，矢の向きは任意につけておく．この 2 次形式は $q_Q(\boldsymbol{x}) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4$ であるから，Q はちょうど 10 個の正ルートを持つ．具体的には次の 10 個である：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_1 = {}^t(0,0,0,1), \quad \boldsymbol{a}_2 = {}^t(0,0,1,0), \quad \boldsymbol{a}_3 = {}^t(0,0,1,1), \quad \boldsymbol{a}_4 = {}^t(0,1,0,0),\\
&\boldsymbol{a}_5 = {}^t(0,1,1,0), \quad \boldsymbol{a}_6 = {}^t(0,1,1,1), \quad \boldsymbol{a}_7 = {}^t(1,0,0,0), \quad \boldsymbol{a}_8 = {}^t(1,1,0,0),\\
&\boldsymbol{a}_9 = {}^t(1,1,1,0), \quad \boldsymbol{a}_{10} = {}^t(1,1,1,1).
\end{aligned}$$

さて，線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^4 \to E^{(5)}$ を $\varphi(\boldsymbol{e}_i^{(4)}) = \boldsymbol{\alpha}_i^{(5)}$ によって定義しよう（これは同型写像である）．ただし $\boldsymbol{\alpha}_i^{(5)}$ たちはルート系 $\Phi(\mathbb{A}_4)$ の単純ルートである（§3 を参照）．この写像の，$\mathbb{R}^4$ の基底 $\boldsymbol{e}_1^{(4)}, \boldsymbol{e}_2^{(4)}, \boldsymbol{e}_3^{(4)}, \boldsymbol{e}_4^{(4)}$ および $E^{(5)}$ の基底 $\boldsymbol{\alpha}_1^{(5)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(5)}, \boldsymbol{\alpha}_3^{(5)}, \boldsymbol{\alpha}_4^{(5)}$ に関する表現行列は次にように与えられる．

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

したがって $\varphi(\Phi_Q) = \{P\boldsymbol{a}_1, P\boldsymbol{a}_2, \ldots, P\boldsymbol{a}_{10}\}$ であり，これは $\Phi(\mathbb{A}_4)$ の正ルート全体である．Theorem 3.5 によれば，$\Phi(\mathbb{A}_4)$ の元で生成される $E^{(5)}$ の 3 次元部分空間（すなわちコランク 1 の refine された格子）の法線ベクトルは，（零でない定数倍を除いて）ちょうど $15 = 2^4 - 1$ 個存在する．それらは次の通りである：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{n}_1 = {}^t(-4,1,1,1,1), \quad \boldsymbol{n}_2 = {}^t(1,-4,1,1,1), \quad \boldsymbol{n}_3 = {}^t(1,1,-4,1,1),\\
&\boldsymbol{n}_4 = {}^t(1,1,1,-4,1), \quad \boldsymbol{n}_5 = {}^t(1,1,1,1,-4), \quad \boldsymbol{n}_6 = {}^t(-3,-3,2,2,2),\\
&\boldsymbol{n}_7 = {}^t(-3,2,-3,2,2), \quad \boldsymbol{n}_8 = {}^t(-3,2,2,-3,2), \quad \boldsymbol{n}_9 = {}^t(-3,2,2,2,-3),\\
&\boldsymbol{n}_{10} = {}^t(2,-3,-3,2,2), \quad \boldsymbol{n}_{11} = {}^t(2,-3,2,-3,2), \quad \boldsymbol{n}_{12} = {}^t(2,-3,2,2,-3),
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{n}_{13} = {}^t(2,2,-3,-3,2), \quad \boldsymbol{n}_{14} = {}^t(2,2,-3,2,-3), \quad \boldsymbol{n}_{15} = {}^t(2,2,2,-3,-3).$$

したがって，Q の正ルートによって生成される $\mathbb{R}^4$ の 3 次元部分空間の法線ベクトルは，${}^tP \cdot \boldsymbol{n}_k$（$k = 1,2,\ldots,15$）のうちのいずれかである．そこで法線ベクトルが ${}^tP \cdot \boldsymbol{n}_k$ である refine された格子を L_k で表そう．これらは次の 15 個である：

$$\begin{aligned}
&L_1 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4 \rangle_{\mathbb{Z}}, && L_2 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_8 \rangle_{\mathbb{Z}}, && L_3 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_7 \rangle_{\mathbb{Z}}, \\
&L_4 = \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_7 \rangle_{\mathbb{Z}}, && L_5 = \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_7 \rangle_{\mathbb{Z}}, && L_6 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_7 \rangle_{\mathbb{Z}}, \\
&L_7 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_8 \rangle_{\mathbb{Z}}, && L_8 = \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_9 \rangle_{\mathbb{Z}}, && L_9 = \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_{10} \rangle_{\mathbb{Z}}, \\
&L_{10} = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_9 \rangle_{\mathbb{Z}}, && L_{11} = \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_8 \rangle_{\mathbb{Z}}, && L_{12} = \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_6, \boldsymbol{a}_8 \rangle_{\mathbb{Z}}, \\
&L_{13} = \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_6, \boldsymbol{a}_7 \rangle_{\mathbb{Z}}, && L_{14} = \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_7 \rangle_{\mathbb{Z}}, && L_{15} = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_7 \rangle_{\mathbb{Z}}.
\end{aligned}$$

したがって，次元ベクトルが $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ であるスカラー無し表現 $(S_{\boldsymbol{d}}, R_{\boldsymbol{d}}(Q))$ が FP であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{d}$ が上に挙げた 15 個の格子の少なくとも一つに含まれることである．（なお，$\boldsymbol{d}$ が sincere であれば，L_1，L_5，L_6 および L_{15} の格子に含まれることはない．）

この方法によって，例えば [4, Example 4.3] にあるような，次元ベクトルに関する具体的な条件を得ることができる．

References

[1] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6*, Elements of Mathematics (Berlin), Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley, Springer-Verlag, 2002.

[2] G. Bobiński, C. Riedtmann, and A. Skowroński, *Semi-invariants of quivers and their zero sets*, Trends in representation theory of algebras and related topics, 49–99, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., 2008.

[3] T. Kamiyoshi, M. Nagura, and S. Otani, *Counting one-codimensional subspaces generated by subsets of a root system*, Int. J. Algebra **5** (2011), 591–604.

[4] M. Nagura and T. Niitani, *Conditions on a finite number of orbits for A_r-type quivers*, J. Algebra **274** (2004), 429–445.

[5] M. Nagura, S. Otani, and D. Takeda, *A characterization of finite prehomogeneous vector spaces associated with products of special linear groups and Dynkin quivers*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 1255–1264.