

エッジイデアルのベッチ数の非消滅性について

木村杏子 (静岡大学理学部)

1 Introduction

G を有限単純グラフとする. ここで単純とは, ループや多重辺をもたないことを意味する. (以下, 常にこれを仮定する.) G の頂点集合を $V = V(G)$ で表し, G の辺集合を $E(G)$ で表す. G の頂点に対応する変数を持つ, 体 K 上の多項式環を考える: $S := K[V] := K[x_i : i \in V]$. グラフ G のエッジイデアルとは

$$I(G) := (x_i x_j : \{i, j\} \in E(G))$$

なる S のイデアルをいう. $I(G)$ の環論的不変量をグラフ G の言葉で記述したい, というのが本報告書の主題である.

S は標準的な次数付けを持つとする. すなわち $\deg x_i = 1, i \in V$ とする. 完全列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j \geq 0} S(-j)^{\beta_{p,j}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{j \geq 0} S(-j)^{\beta_{1,j}} \longrightarrow S \longrightarrow S/I(G) \longrightarrow 0$$

を $S/I(G)$ の S 上の次数付極小自由分解とする. ここで $S(-j)$ は k 次の斉次部分 S_{k-j} なる自由 S -加群を表す. この $\beta_{i,j}(S/I(G)) := \beta_{i,j}$ を $S/I(G)$ の次数付ベッチ数という. また極小自由分解の長さ p は, $S/I(G)$ の射影次元 $\text{pd } S/I(G)$ である. すなわち

$$\text{pd } S/I(G) = \max\{i : \beta_{i,j}(S/I(G)) \neq 0\}$$

である. また, $S/I(G)$ の regularity は

$$\text{reg } S/I(G) := \max\{j - i : \beta_{i,j}(S/I(G)) \neq 0\}$$

で定められる. Zheng [9] は forest と呼ばれるグラフのクラスに対して射影次元と regularity の特徴づけを与えた. Hà-Van Tuyl [4] は Zheng による regularity の特徴づけを弦グラフと呼ばれるものへと拡張した. 一方 Katzman [6] は一般のグラフに対して, 次数付ベッチ数の消滅性・非消滅性に関する結果を与えた.

本報告書では次数付ベッチ数が非消滅となるための十分条件を与える (定理 3.1). これは Katzman の結果の一般化である. また, 弦グラフに対してはその条件が必要十分であることを示し, さらに forest に対する次数付ベッチ数の特徴づけを与える (定理 4.1). 定理 4.1 の証明においては Hà-Van Tuyl による, 弦グラフの次数付ベッチ数に対する帰納的な公式 [4, Theorem 5.8] が重要な役割を果たす.

本報告書の構成は以下のとおりである. 第 2 節でグラフの言葉を準備し, 上に挙げた Zheng, Hà-Van Tuyl, Katzman による結果を紹介する. 第 3 節では次数付ベッチ数の非消滅性について論じる. 特に定理 3.1 を証明する. 第 4 節で弦グラフや forest に対して定理 3.1 を精密化した結果を与える. 最後に第 5 節で, 弦グラフの射影次元の特徴付けについて, さらに言い換え, 応用を述べる.

2 いくつかの定義と既知の結果

この節ではグラフに関する言葉をいくつか用意する. また, Introduction で挙げた既知の結果を紹介する.

G を有限単純グラフとする.

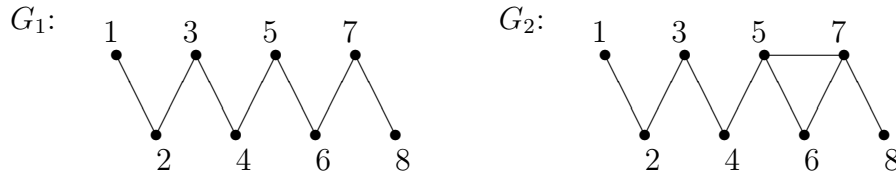
定義 2.1 ([4, Definitions 2.2 and 6.3]). G の2つの辺 $e, e' \in E(G)$ に対し, e と e' の G における距離を

$$e_0 = e, e_1, \dots, e_l = e', \quad e_{i-1} \cap e_i \neq \emptyset$$

なる G の辺の列の長さ l の最小値と定め, これを $\text{dist}_G(e, e')$ で表す. このような列が存在しないときには $\text{dist}_G(e, e') = \infty$ と定義する.

e と e' が G において 3-disjoint とは, $\text{dist}_G(e, e') \geq 3$ なるときに言う. また, $E(G)$ の部分集合 \mathcal{E} が G において pairwise 3-disjoint とは, \mathcal{E} に属するどの2つの辺 e, e' ($e \neq e'$) も G において 3-disjoint なるときに言う.

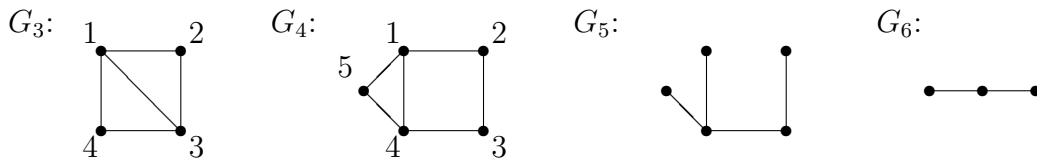
例 2.2. G_1, G_2 を下図のようなグラフとする.



辺 $\{4, 5\}, \{7, 8\}$ に注目すると, これらは G_1 においては 3-disjoint であるが, G_2 においては $\{5, 7\}$ という辺があるため 3-disjoint ではない. また, G_1 において $\{\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{7, 8\}\}$ は pairwise 3-disjoint である.

グラフ G は, G に含まれる長さ 4 以上のサイクル C が必ず弦 (chord) を持つとき弦グラフと呼ばれる. ここで G のサイクル C の弦とは, C において隣接しない 2 頂点を結ぶ G の辺を意味する. また, サイクルを含まないグラフを forest という. (特に連結なものを tree という.) forest は弦グラフの特別なものである.

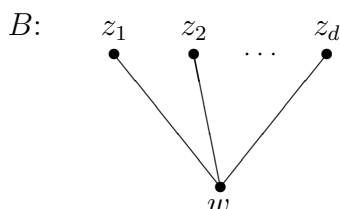
例 2.3. 下図のグラフ G_3, G_4, G_5, G_6 を考える.



G_3 の長さ 4 以上のサイクルは $C = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$ のみであり, このサイクルは (G_3 において) 弦 $\{1, 3\}$ をもつ. したがって G_3 は弦グラフである. G_4 も同じサイクル C を持つが, G_4 においては C は弦を持たないので, G_4 は弦グラフではない. また, G_3, G_4 はサイクルを含むので forest ではない. 一方 G_5 および G_6 は forest (特に tree) であり, 連結成分がこの 2 つからなるグラフも forest である. (これは tree ではない.)

さて, forest の中でも特別なものに名前を付ける.

定義 2.4 ([9, Definition 1.7]). B を, 頂点集合を $\{w, z_1, z_2, \dots, z_d\}$, 辺集合を $\{\{w, z_1\}, \{w, z_2\}, \dots, \{w, z_d\}\}$ とするグラフとする. ただし $d \geq 1$ とする. このようなグラフをブーケという:



ブーケ B において, 頂点 w を B の root, 頂点 z_i ($i = 1, 2, \dots, d$) を B の flower, 辺 $\{w, z_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, d$) を B の stem という.

言い換えると, ブーケは $(1, d)$ 型の完全二部グラフ $K_{1,d}$ である.

G の部分グラフであるようなブーケを G のブーケと呼ぶことにする. G のブーケの集合 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_j\}$ に対し,

$$F(\mathcal{B}) := \{z \in V : z \text{ はあるブーケ } B_k \in \mathcal{B} \text{ の flower}\},$$

$$R(\mathcal{B}) := \{w \in V : w \text{ はあるブーケ } B_k \in \mathcal{B} \text{ の root}\}$$

$$S(\mathcal{B}) := \{e \in E(G) : e \text{ はあるブーケ } B_k \in \mathcal{B} \text{ の stem}\}$$

とおく. \mathcal{B} の type を $(\#F(\mathcal{B}), \#R(\mathcal{B}))$ と定める. G のブーケの集合の中に次のような disjointness を定義する.

定義 2.5. G のブーケの集合 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_j\}$ が G において strongly disjoint とは, 次の 2 条件を満たす時に言う:

- (1) $k \neq l$ に対し, $V(B_k) \cap V(B_l) = \emptyset$ である.
- (2) \mathcal{B} の各ブーケ B_k から stem s_k を適当に選ぶことにより, $\{s_1, s_2, \dots, s_j\}$ が G において pairwise 3-disjoint となるようにできる.

さらに次の定義を与えておく.

定義 2.6. G を有限単純グラフとする.

- (1) G が type (i, j) の strongly disjoint なブーケの集合にちょうど一致するとは, G の type (i, j) の strongly disjoint なブーケの集合 \mathcal{B} で

$$V(G) = F(\mathcal{B}) \cup R(\mathcal{B}), \quad E(G) = S(\mathcal{B})$$

なるものが存在するときに言う.

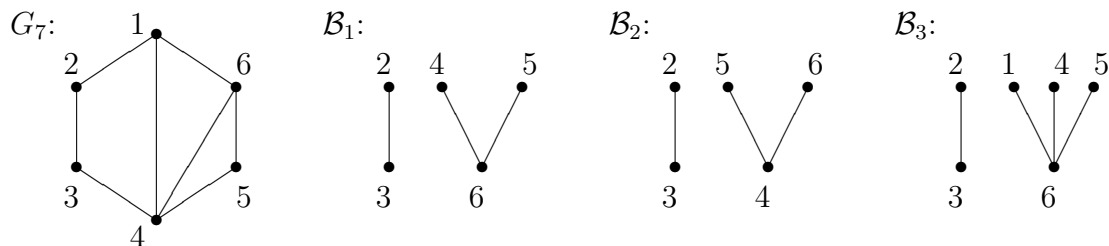
- (2) G が type (i, j) の strongly disjoint なブーケの集合をちょうど含むとは, G の type (i, j) の strongly disjoint なブーケの集合 \mathcal{B} で

$$V(G) = F(\mathcal{B}) \cup R(\mathcal{B})$$

なるものが存在するときに言う.

G を V 上のグラフとする. $W \subset V$ に対して W を頂点集合とし, $\{e \in E(G) : e \subset W\}$ を辺集合とするような G の部分グラフを考えることができる. これを G の W への誘導部分グラフと言ひ, G_W で表す. 後の節では, type (i, j) の strongly disjoint なブーケの集合をちょうど含むような誘導部分グラフを考える.

例 2.7. 下図のグラフ G_7 および G_7 のブーケの集合 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ を考える.



例えば, \mathcal{B}_1 は 3 を root とし 2 を flower とする G_7 のブーケと, 6 を root とし 4, 5 を flower とするブーケからなる. したがって type $(3, 2)$ のブーケの集合である. また $S(\mathcal{B}_1) = \{\{3, 2\}, \{6, 4\}, \{6, 5\}\}$ である. 同様に $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ の type はそれぞれ $(3, 2), (4, 2)$ である. \mathcal{B}_1 と \mathcal{B}_3 は, $\{3, 2\}$ と $\{6, 5\}$ が G_7 において 3-disjoint であるため strongly disjoint なブーケの集合である. よって G_7 は type $(4, 2)$ の strongly disjoint なブーケの集合をちょうど含む. また $W = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ とすると $(G_7)_W$ は type $(3, 2)$ のブーケの集合をちょうど含む. しかし, “ G_7 は type $(3, 2)$ のブーケの集合をちょうど含む” とは言えない.

一方 $\{3, 4\} \in E(G_7)$ であるため, G_7 における $\{2, 3\}$ と $\{4, 5\}, \{4, 6\}$ との距離はともに 2 である. したがって \mathcal{B}_2 は strongly disjoint でない. このことから \mathcal{B} が G において strongly disjoint であるとき, \mathcal{B} の任意の 2 つの root は G において辺を共有しないことがわかる.

なお, stem が $\{2, 3\}$ のみからなるブーケは, 2, 3 いずれも root とみなせるが, どちらを root とみなすかによって異なるブーケであると考えられる.

さて, Zheng [9], Hà–Van Tuyl [4] による結果を紹介する. グラフ G に対し,

$$d_G := \max\{\#F(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ は } G \text{ の strongly disjoint なブーケの集合}\},$$

$$c_G := \max\{\#\mathcal{E} : \mathcal{E} \subset E(G) \text{ は } G \text{ において pairwise 3-disjoint}\}$$

と定める.

定理 2.8 (Hà–Van Tuyl [4], Zheng [9]). G を有限単純グラフとする.

- (1) G が forest のとき, $\text{pd } S/I(G) = d_G$ が成り立つ ([9]).
- (2) 一般に $\text{reg } S/I(G) \geq c_G$ が成り立つ ([4, Theorem 6.5]).
- (3) G が弦グラフのとき $\text{reg } S/I(G) = c_G$ が成り立つ ([4, Theorem 6.8], [9, Theorem 2.18]).

また Katzman [6] によるベッチ数に関する結果は次のとおりである.

定理 2.9 (Katzman [6, Lemma 2.2, Proposition 2.5]). G を V 上のグラフとする.

- (1) V の部分集合 W で, G の W 上への誘導部分グラフ G_W が type (i, j) の strongly disjoint なブーケの集合にちょうど一致するものが存在するとき, $\beta_{i,i+j}(S/I(G)) \neq 0$.
- (2) $k > 2i$ のとき $\beta_{i,k}(S/I(G)) = 0$.
- (3) $k = 2i$ のとき, $\beta_{i,2i}(S/I(G))$ は, V の部分集合 W で, G_W が type (i, i) の strongly disjoint なブーケの集合にちょうど一致するようなものの個数に一致する.

注意 2.10. 定理 2.8 (2) (Hà–Van Tuyl [4, Theorem 6.5]) は定理 2.9 (3) (または (1); Katzman [6]) から従う. 実際には Hà–Van Tuyl はより一般に hypergraph の範疇において 定理 2.8 (2) に相当するものを証明した.

3 ベッチ数の非消滅性

この節では $\beta_{i,j}(S/I(G)) \neq 0$ となるための十分条件を与える. 本節の主結果は次である.

定理 3.1. G を V 上の有限単純グラフとする. V の部分集合 W で, G の W 上への誘導部分グラフ G_W が type (i, j) の strongly disjoint なブーケの集合をちょうど含むものが存在するとき, $\beta_{i,i+j}(S/I(G)) \neq 0$ である.

特に, $\text{pd } S/I(G) \geq d_G$ である.

注意 3.2. 正確には, $\beta_{i,i+j}(S/I(G))$ は, 条件を満たすような頂点集合 V の部分集合 W の個数以上であるといえる.

定理 3.1 は定理 2.9 (1) (Katzman [6, Proposition 2.5]) の拡張である.

定理 3.1 を証明する前に, グラフの制限とベッチ数の関係を見ておく. ここで, $\beta_{i,j}(S/I(G)) = \beta_{i-1,j}(I(G))$ ($i \geq 1$) であることを注意しておく.

補題 3.3. G を V 上のグラフとすると, 任意の $i \geq 0$ に対して

$$\beta_{i,j}(I(G)) = \sum_{\substack{W \subset V \\ \#W=j}} \beta_{i,j}(I(G_W)).$$

Proof. $I(G)$ は squarefree monomial ideal であるから, ある単体的複体 Δ に付随する Stanley–Reisner イデアル I_Δ に一致する: $I(G) = I_\Delta$. すると, ベッチ数に関する Hochster の公式から,

$$\beta_{i,j}(I(G)) = \beta_{i+1,j}(K[\Delta]) = \sum_{\substack{W \subset V \\ \#W=j}} \dim_K \tilde{H}_{j-(i+1)-1}(\Delta_W; K)$$

を得る. $W \subset V$ に対し, $I(G_W) = I_{\Delta_W}$ であるから, $\#W = j$ のとき, 再び Hochster の公式から

$$\beta_{i,j}(I(G_W)) = \beta_{i+1,j}(K[\Delta_W]) = \dim_K \tilde{H}_{j-(i+1)-1}(\Delta_W; K)$$

を得る. これは補題を証明する. □

Katzman は定理 2.9 (1) の証明に Taylor resolution を用いた. 定理 3.1 の証明においては Taylor resolution の代わりに Lyubeznik resolution を用いる. Lyubeznik resolution ([8]) は “ L -admissible symbol” と呼ばれるもので生成される Taylor resolution の subcomplex であり, 単項式イデアルの (極小とは限らない) 自由分解を与えるものである. I を K 上の多項式環の単項式であるとし, その極小モノミアル生成系を m_1, m_2, \dots, m_μ とする. Taylor resolution の自由基底 $e_{i_1 i_2 \dots i_s} =: [i_1, i_2, \dots, i_s]$ が L -admissible であるとは, 任意の $t < s$ と任意の $q < i_t$ に対して, m_q が $\text{lcm}(m_{i_t}, m_{i_{t+1}}, \dots, m_{i_s})$ を割らないときに言う. L -admissible symbol (したがって Lyubeznik resolution) は, 極小モノミアル生成系の順序によることを注意しておく.

L -admissible symbol $[i_1, i_2, \dots, i_s]$ が極大とは, $\{i_1, i_2, \dots, i_s\} \subset \{j_1, j_2, \dots, j_{s'}\}$ なる L -admissible symbol $[j_1, j_2, \dots, j_{s'}]$ が存在しないときに言う. 極大な L -admissible symbol $[i_1, i_2, \dots, i_s]$ が条件

$$\text{lcm}(m_{i_1}, \dots, \widehat{m_{i_k}}, \dots, m_{i_s}) \neq \text{lcm}(m_{i_1}, \dots, m_{i_s}), \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (3.1)$$

を満たす時, $[i_1, i_2, \dots, i_s]$ は極小自由分解においてキャンセルされずに必ず残ることに注意する (Barile [1, Remark 1] も見よ).

さて, 定理 3.1 を証明する.

定理 3.1 の証明. 補題 3.3 により, $\#V = i+j$ かつ G が type (i, j) の strongly disjoint なブーケの集合 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_j\}$ をちょうど含むときに $\beta_{i,i+j}(S/I(G)) \neq 0$ を示せばよい. Strongly disjoint の定義により, 各ブーケ B_k から stem s_k を適当に選んで, $\mathcal{S}_0 := \{s_1, s_2, \dots, s_j\}$ が G において pairwise 3-disjoint なるようにできる. $\mathcal{S}' = S(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{S}_0$, $\mathcal{E} = E(G) \setminus S(\mathcal{B})$ とおく. G の辺の順序を $\mathcal{S}', \mathcal{E}, \mathcal{S}_0$ という順になるように定め, これに付随する $I(G)$ の極小モノミアル生成系の順序を考える. \mathcal{S}_0 は pairwise 3-disjoint であるから, $\mathcal{S}', \mathcal{S}_0$ に対応する symbol σ は L -admissible である. 次に, 任意の $e = \{u, v\} \in \mathcal{E}$ に対し, $\mathcal{S}', e, \mathcal{S}_0$ に対応する symbol τ を考える. $V = F(\mathcal{B}) \cup R(\mathcal{B})$ であり, \mathcal{B} は strongly disjoint であるから $\{u, v\} \cap F(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ である. さらに \mathcal{S}_0 は pairwise 3-disjoint であるので u, v の少なくとも一方は \mathcal{S}' に属する辺の頂点である. u をそのような頂点とし, $u \in V(B_k)$ とする. このとき $e = \{u, v\}$ に対応する単項式と s_k に対応する単項式との積は, u を flower とする B_k の stem に対応する単項式で割り切れる. よって τ は L -admissible でない. これは σ が極大であることを意味する. σ が条件 (3.1) を満たすことは明らかである. $\deg \sigma = i+j$ であるから $\beta_{i,i+j}(S/I(G)) \neq 0$ を得る. \square

4 弦グラフに対する結果

この節では, 弦グラフに対して, 定理 3.1 の逆が成り立つことを証明する. これにより, 弦グラフに対して, 射影次元の特徴付けが得られる. (次節において, この特徴づけをさらに言い換える.) また forest に対して, ベッチ数の特徴づけを与える. この節の主結果は次である.

定理 4.1. G を有限単純グラフとする.

- (1) G が弦グラフのとき, 定理 3.1 の逆も正しい. すなわち, $\beta_{i,i+j}(S/I(G)) \neq 0$ なるための必要十分条件は, V の部分集合 W で, G_W が type (i, j) の strongly disjoint なブーケの集合をちょうど含むようなものが存在することである.

特に, $\text{pd } S/I(G) = d_G$ である.

- (2) G が forest のとき, $\beta_{i,i+j}(S/I(G))$ はそのような部分集合 W の個数に一致する.

G を頂点集合 V 上の有限単純グラフとする. $u, v \in V$ とする. u が G において v の neighbourhood であるとは, $\{u, v\} \in E(G)$ のときにいう. $N(v)$ で v の neighbourhood 全体の集合を表す. $e \in E(G)$ に対して $G \setminus e$ で, G から辺 e を除くことによって得られるグラフを表す. またグラフ G は, その任意の 2 つの頂点が必ず辺を共有するとき, 完全グラフと呼ばれる. 弦グラフについて, 次のことが知られている.

事実 4.2 (Dirac [3]). V 上のグラフ G が弦グラフであるための必要十分条件は, G の任意の誘導部分グラフに対してある頂点 v が存在してその $N(v)$ への誘導部分グラフが完全グラフになることである.

便宜上, monomial ideal I に対して $\beta_{-1,0}(I) = 1$, $\beta_{-1,j}(I) = 0$ ($j \neq 0$) とする. また辺をもたないグラフ G について, $\beta_{i,j}(I_G)$ を $(i, j) = (-1, 0)$ のとき 1, それ以外のとき 0 と定める. Hà-Van Tuyl [4] による次の補題は, 定理 4.1 の証明において重要である.

補題 4.3 (Hà-Van Tuyl [4, Lemma 5.7, Theorem 5.8]). G を弦グラフとし, $e = \{u, v\}$ を $G_{N(v)}$ が完全グラフであるような G の辺とする. $N(u) = \{v, x_1, \dots, x_t\}$ とおき, $G' := G_{V(G) \setminus \{u, v, x_1, \dots, x_t\}}$ とする.

(1) $G \setminus e, G'$ はともに弦グラフである.

(2) $i \geq 0$ に対し,

$$\beta_{i,j}(I(G)) = \beta_{i,j}(I(G \setminus e)) + \sum_{l=0}^i \binom{t}{l} \beta_{i-1-l, j-2-l}(I(G')) \quad (4.1)$$

が成り立つ.

注意 4.4. 補題 4.3 において, G' の辺集合は

$$E(G') = \{e' \in E(G) : \text{dist}_G(e, e') \geq 3\}$$

である.

定理 4.1 の証明においては (4.1) を次の形で用いる:

$$\beta_{i-1, i+j}(I(G)) = \beta_{i-1, i+j}(I(G \setminus e)) + \sum_{l=0}^{i-1} \binom{t}{l} \beta_{i-2-l, (i-2-l)+j}(I(G')) \quad (4.2)$$

また, $G \setminus e, G'$ の strongly disjoint なブーケの集合について, 次の補題が成り立つ.

補題 4.5. G を弦グラフとする. 補題 4.3 と同じ記号を用いる.

(1) B を $G \setminus e$ の strongly disjoint なブーケの集合とする. このとき B は G においても strongly disjoint である. 特に, $d_G \geq d_{G \setminus e}$ が成り立つ.

(2) B' を G' の strongly disjoint なブーケの集合とする. u を root とし v, x_1, \dots, x_t を flower とする G のブーケを B とすると, $B' \cup \{B\}$ は G の strongly disjoint なブーケの集合である. 特に, $d_G \geq d_{G'} + (t + 1)$ が成り立つ.

Proof. (1) $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_j\}$ を $G \setminus e$ ($e = \{u, v\}$) の strongly disjoint なブーケの集合とする. u, v のいずれかが $R(\mathcal{B}) \cup F(\mathcal{B})$ に含まれないとき, \mathcal{B} が G においても strongly disjoint であることは明らかである. また, u と v が同じブーケ B_k の頂点のとき (このとき u, v はともに B_k の flower である) も \mathcal{B} が G において strongly disjoint であることは容易にわかる. したがって $u \in V(B_1), v \in V(B_2)$ としてよい.

(Case 1): u, v がともに root のときを考える. $G_{N(v)}$ が完全グラフであることから, このとき B_2 の flower はすべて u の neighbourhood である. すると, B_1 の任意の stem と B_2 の任意の stem との距離が $G \setminus e$ において 2 以下となる. これは \mathcal{B} の $G \setminus e$ における strongly disjoint 性に矛盾する.

(Case 2): u が B_1 の root, v が B_2 の flower のときを考える. $G_{N(v)}$ が完全グラフであることから, u は B_2 の root の neighbourhood であることが従う. すると Case 1 のときと同じ矛盾が生じる.

(Case 3): u が B_1 の flower, v が B_2 の root のときを考える. $G_{N(v)}$ の完全性から, u を含む B_1 の stem と B_2 の任意の stem との $G \setminus e$ における距離は 2 以下となる. したがって, strongly disjoint 性を保証する B_1 の stem は u を含まないものから選ばれる. ゆえに, \mathcal{B} は G においても strongly disjoint である.

(Case 4): u, v がともに flower であるときを考える. このとき B_2 の root は u の neighbourhood であるから, u を含む stem と v を含む stem との $G \setminus e$ における距離は 2 以下である. よって \mathcal{B} は G において strongly disjoint である.

(2) 注意 4.4 より, e は B' の任意の stem と 3-disjoint である. よって S を B' の strongly disjoint 性を保証する stem の集合とすると, $S \cup \{e\}$ は $B' \cup \{B\}$ の strongly disjoint 性を保証する stem の集合となる. \square

さて, 定理 4.1 を証明する.

定理 4.1 の証明. (1) $\#E(G)$ に関する帰納法により, $\beta_{i,i+j}(S/I(G)) \neq 0$ のとき V の部分集合 W で G_W が type (i, j) の strongly disjoint なブーケの集合をちょうど含むようなものが存在することを示す. $\#E(G) = 1$ のとき, $\beta_{i,i+j}(S/I(G))$ は $(i, j) = (1, 1)$ を除いて 0 であり, $\beta_{1,1+1}(S/I(G)) = 1$ である. このとき G は type $(1, 1)$ のブーケの集合にちょうど一致しているから, 主張は正しい.

$\#(E(G)) \geq 2$ を仮定する. 補題 3.3 により, $\#V = i+j$ を仮定して $\beta_{i,i+j}(S/I(G)) \neq 0$, i.e., $\beta_{i-1,i+j}(I(G)) \neq 0$ のとき G が type (i, j) の strongly disjoint なブーケの集合をちょうど含むことを示せばよい. 補題 4.3 と同じ記号を用いる. $G' = G_{W_0}$, $W_0 = V \setminus \{v, u, x_1, \dots, x_t\}$ であったことに注意する. $\#W_0 = i+j - (t+2)$ であるから (4.2) の右辺の第 2 項は $l = t$ を除いて 0 であることに注意する. したがって, (4.2) は次のように書き換えられる:

$$\beta_{i-1,i+j}(I(G)) = \beta_{i-1,i+j}(I(G \setminus e)) + \beta_{i-2-t,(i-2-t)+j}(I(G')). \quad (4.3)$$

$\beta_{i-1,i+j}(I(G)) \neq 0$ ゆえ, $\beta_{i-1,i+j}(I(G \setminus e)) \neq 0$ または $\beta_{i-2-t,(i-2-t)+j}(I(G')) \neq 0$ の少なくとも一方が成り立つ.

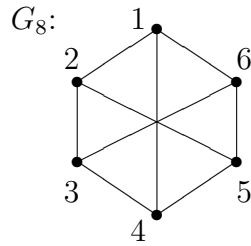
$\beta_{i-1,i+j}(I(G \setminus e)) \neq 0$ のとき, 帰納法の仮定より, $G \setminus e$ は type (i, j) の strongly disjoint なブーケの集合 B をちょうど含む. 補題 4.5 (1) より, B は G においても strongly disjoint である.

$\beta_{i-2-t,(i-2-t)+j}(I(G')) \neq 0$ のとき, 帰納法の仮定より, G' は type $(i-1-t, j-1)$ の strongly disjoint なブーケの集合 B' をちょうど含む. u を root とし, v, x_1, \dots, x_t を flower とする G のブーケを B とすると, 補題 4.5 (2) より $B = B' \cup \{B\}$ は G の strongly disjoint なブーケの集合となる. また, B の type は (i, j) である. したがって G は type (i, j) の strongly disjoint なブーケの集合をちょうど含む.

(2) G が forest と仮定する. 再び補題 3.3 から $\#V(G) = i+j$ かつ $\beta_{i-1,i+j}(I(G)) \neq 0$ のとき, $\beta_{i-1,i+j}(I(G)) = 1$ を示せばよい. $\#E(G)$ に関する帰納法で証明する. $\#E(G) = 1$ のときは明らかである. $\#E(G) \geq 2$ を仮定する. (1) と同様に式 (4.3) が成立していることに注意する. G は forest ゆえ u は v の唯一の neighbourhood である. したがって $G \setminus e$ の孤立点を除く頂点の個数は $i+j-1$ 以下である. これは $\beta_{i-1,i+j}(I(G \setminus e)) = 0$ を意味する. よって (4.3) より $\beta_{i-2-t,(i-2-t)+j}(I(G')) \neq 0$ を得る. すると帰納法の仮定から $\beta_{i-2-t,(i-2-t)+j}(I(G')) = 1$ が従い, 再び (4.3) により $\beta_{i-1,i+j}(I(G)) = 1$ を得る. \square

次の例は, 一般のグラフに対しては定理 4.1 (1) が成り立たないことを示す.

例 4.6. 図のようなグラフ G_8 を考える (6 個の頂点, 9 本の辺からなるグラフ). これは弦グラフではない. また $d_{G_8} = 3$ である.



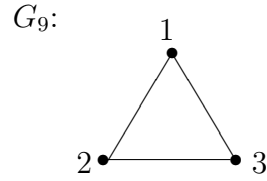
$S/I(G_8)$ の Betti diagram は

$j \setminus i$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1		9	18	15	6	1

(i 行 j 列が $\beta_{i,i+j}(S/I(G_8))$ を表す) であり $\beta_{4,4+1}(S/I(G_8)) \neq 0$ である. しかし 4 個の flower を持つ G のブーケは存在しない. また $\text{pd } S/I(G_8) > d_G$ となっている.

また次の例から, 弦グラフに対して定理 4.1 (2) は成り立たないことがわかる.

例 4.7. 図のグラフ G_9 を考える.



このとき $S/I(G_9)$ の Betti diagram は

$j \setminus i$	0	1	2
0	1		
1		3	2

である. $V(G_9) = \{1, 2, 3\}$ の $2 + 1$ 個の元からなる部分集合は $V(G_9)$ のみであるから, そのような部分集合の個数は $\beta_{2,2+1}(S/I(G_9)) = 2$ とは一致しない.

5 弦グラフの射影次元のもう一つの特徴付け

定理 4.1 により, 弦グラフに対して, 射影次元の特徴付けが得られた. しかしながら, d_G を実際のグラフから読み取るのは容易でないように思われる. この節では strongly disjoint 性を少し弱めた概念を導入し, 弦グラフに対する射影次元の別のもう一つの特徴づけを与える.

G を有限単純グラフとし, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_j\}$ を G のブーケの集合とする.

定義 5.1. G のブーケの集合 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_j\}$ が G において semi-strongly disjoint とは, 次の 2 条件を満たす時に言う:

- (1) $k \neq l$ に対し, $V(B_k) \cap V(B_l) = \emptyset$ である
- (2) $R(\mathcal{B})$ のどの 2 つの頂点も G において辺を共有しない.

グラフ G のブーケの集合 \mathcal{B} に対し, \mathcal{B} 中の二つのブーケ B_{i_1}, B_{i_2} のルートが辺を共有するとき, 例 2.7 の \mathcal{B}_2 でも見たように, B_{i_1} の任意の stem と B_{i_2} の任意の stem との距離は 2 である. このことから \mathcal{B} が strongly disjoint ならば semi-strongly disjoint であることが従う.

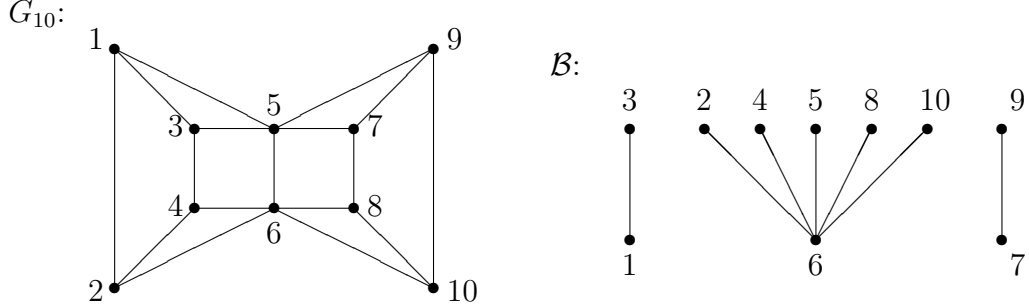
グラフ G に対し,

$$d'_G := \max\{\#F(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ は } G \text{ の semi-strongly disjoint なブーケの集合}\}$$

と定める. 一般に $d_G \leq d'_G$ が成り立つ.

次の例は $d_G < d'_G$ なるグラフ G の存在を示す.

例 5.2. 次のグラフ G_{10} を考える. すると下図の \mathcal{B} は G_{10} の semi-strongly disjoint なブーケの集合である.



とくに $d'_{G_{10}} = 7$ である. しかし, \mathcal{B} は strongly disjoint でない. 実際, 6 を root とする \mathcal{B} に属するブーケを B とすると, B の stem で $\{1, 3\}$ と 3-disjoint なものは $\{6, 8\}, \{6, 10\}$ であり, $\{7, 9\}$ と 3-disjoint なものは $\{6, 2\}, \{6, 4\}$ である. よって, B の stem で $\{1, 3\}, \{7, 9\}$ の両方と 3-disjoint な stem は存在しない. とくに $d_{G_{10}} = 6$ であることが確かめられ, $d_{G_{10}} < d'_{G_{10}}$ となる.

定理 5.3. G が弦グラフのとき,

$$\text{pd } S/I(G) = d_G = d'_G.$$

Proof. $d_G \geq d'_G$ を示せば, 定理 4.1 (1) より望む等式を得る. $\#E(G)$ に関する帰納法を用いてこれを示す. $\#E(G) = 1$ のときは明らかに $d_G = d'_G = 1$ である.

$\#E(G) \geq 2$ のときを考える. 補題 4.3 と同じ記号を用いる. $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_j\}$ を $\#F(\mathcal{B}) = d'_G$ なる semi-strongly disjoint な G のブーケの集合とする. $j = 1$ のとき \mathcal{B} は strongly disjoint であるから, 主張は明らかである. $j \geq 2$ とする. $e = \{u, v\} \notin S(\mathcal{B})$ のとき, \mathcal{B} は $G \setminus e$ のブーケの集合であり, $G \setminus e$ においても semi-strongly disjoint である. すると, 帰納法の仮定および補題 4.5 により

$$d'_G \leq d'_{G \setminus e} = d_{G \setminus e} \leq d_G$$

となり, 主張を得る.

次に $e \in S(\mathcal{B})$ のときを考える. $e \in E(B_j)$ とする. まず, u が B_1 の root の neighbourhood であるときを考える. このとき B_j の root は v である. B'_1 を B_1 に u を flower として付け加えたブーケ, B'_j を B_j から flower u を除いて得られるブーケとし, $\mathcal{B}' = \{B'_1, B_2, \dots, B_{j-1}, B'_j\}$ とする. すると \mathcal{B}' は G の semi-strongly disjoint なブーケの集合であり, e を stem として含まない. よって, 先に示したことから $d'_G \leq d_G$ を得る. したがって u はどの $B_k, k \neq j$ の root w_k とも辺を共有しないとしてよい. このとき $G_{N(v)}$ が完全グラフであることから, B_j の root は u であるとしてよい. また v も $w_k, k \neq j$ の neighbourhood でない. B_1, \dots, B_{j-1} から u の neighbourhood であるような flower を除いてできるブーケ

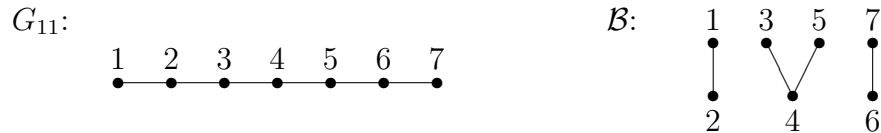
の集合 $\{B'_1, \dots, B'_{j-1}\}$ を B' とすると, B' は G' の semi-strongly disjoint なブーケの集合で, $d'_G - (t+1) \leq \#F(B') \leq d'_{G'}$ である. 帰納法の仮定と補題 4.5 (2) を合わせると,

$$d'_G \leq d'_{G'} + (t+1) = d_{G'} + (t+1) \leq d_G$$

を得る. □

次の例は, forest に対するベッチ数の特徴づけを semi-strongly disjoint なブーケの集合に置き換えることはできないことを示す.

例 5.4. 次のグラフ G_{11} およびそのブーケの集合 B を考える. B が semi-strongly disjoint であることは容易に確認できる.



4 を root とし, 3, 5 を flower とするブーケを $B(\in \mathcal{B})$ とする. $\{1, 2\}$ と 3-disjoint な B の stem は $\{4, 5\}$ のみであり, $\{6, 7\}$ と 3-disjoint な B の stem は $\{3, 4\}$ のみである. よって B は strongly disjoint ではない.

実際, B は type (4, 3) のブーケの集合であるが, $S/I(G_{11})$ の Betti diagram は

$j \setminus i$	0	1	2	3	4
0	1				
1		6	5		
2			6	9	3

で与えられ, 確かに $\beta_{4,4+3}(S/I(G_{11})) = 0$ である.

注意 5.5. 一般にグラフ G に対して $\text{pd } S/I(G) \geq d_G$ (定理 3.1), $d'_G \geq d_G$ であった. そこで, $\text{pd } S/I(G)$ と d'_G との間に大小関係はあるのかという疑問が自然に起こるが, 今のところよくわからない. $d'_G \leq \text{pd } S/I(G)$ なる例は豊富にあるが, 一般にこの不等式が成り立つのかはわかっていない.

最後に定理 5.3 の応用を述べる. G を V 上の有限単純グラフとする. V の部分集合 \mathcal{C} が G の vertex cover であるとは, 任意の $e \in E(G)$ に対し, $e \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ なるときにいう. G の vertex cover \mathcal{C} が極小とは, \mathcal{C} が包含関係に関して極小のときにいう. G の vertex cover は $I(G)$ の極小素因子と一対一に対応する:

$$I(G) = \bigcap_{\mathcal{C}: \text{minimal vertex cover of } G} (x_i : i \in \mathcal{C}).$$

$I(G)$ の極小素因子の中の height の最大値を $I(G)$ の big height といい, $\text{bight } I(G)$ で表す. 一般に, $\text{pd } S/I(G) \geq \text{bight } I(G)$ が成り立つ. 定理 5.3 の系として, 次が得られる.

系 5.6. G を弦グラフとすると,

$$\text{bight } I(G) = \text{pd } S/I(G).$$

特に, $I(G)$ が unmixed でならば $S/I(G)$ は Cohen–Macaulay である.

注意 5.7. 系 5.6 の後半は Herzog–Hibi–Zheng [5, Theorem] により証明された.

系 5.6 の証明. $\text{pd } S/I(G) \leq \text{bight } I(G)$ を示せばよい. 定理 5.3 より, $\#F(\mathcal{B}) = \text{pd } S/I(G) = d'_G$ なる G の semi-strongly disjoint なブーケの集合 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_j\}$ が存在する. $F(\mathcal{B})$ が G の minimal vertex cover であることを示せばよい. $F(\mathcal{B})$ が G の vertex cover であれば, その極小性は明らかである. $F(\mathcal{B})$ が G の vertex cover であることを示す.

$e \cap F(\mathcal{B}) = \emptyset$ なる G の辺 $e = \{u, v\}$ があつたとする. u がある B_k の root の neighbourhood であるとき, B_k に u を flower として付け加えると, $\#F(\mathcal{B}') = d'_G + 1$ なる G の semi-strongly disjoint なブーケの集合 \mathcal{B}' ができる. これは矛盾である. よって, とくに $u, v \notin F(\mathcal{B}) \cup R(\mathcal{B})$ としてよい. このとき e のみを stem とする G のブーケを B_e で表すと, $\mathcal{B}'' := \mathcal{B} \cup \{B_e\}$ は G の semi-strongly disjoint なブーケの集合である. しかしこの場合も $\#F(\mathcal{B}'') = d'_G + 1$ となり矛盾が生じる. \square

参考文献

- [1] M. Barile, *On ideals whose radical is a monomial ideal*, Comm. Algebra **33** (2005), 4479–4490.
- [2] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay rings*, revised edition, Cambridge studies in advanced mathematics 39, Cambridge University Press, 1998.
- [3] G. A. Dirac, *On rigid circuit graphs*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **25** (1961), 71–76.
- [4] H. T. Hà and A. Van Tuyl, *Monomial ideals, edge ideals of hypergraphs, and their graded Betti numbers*, J. Algebraic Combin. **27** (2008), 215–245.
- [5] J. Herzog, T. Hibi, and X. Zheng, *Cohen–Macaulay chordal graphs*, J. Combin. Theory Ser. A **113** (2006), 911–916.
- [6] M. Katzman, *Characteristic-independence of Betti numbers of graph ideals*, J. Combin. Theory, Ser. A **113** (2006), 435–454.
- [7] K. Kimura, *On the Betti numbers of edge ideals of chordal graphs*, Proceedings of the 32nd Symposium and the 6th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra (2010), 105–114.

- [8] G. Lyubeznik, *A new explicit finite free resolution of ideals generated by monomials in an R -sequence*, J. Pure Appl. Algebra **51** (1988), 193–195.
- [9] X. Zheng, *Resolutions of facet ideals*, Comm. Algebra **32** (2004), 2301–2324.

〒 422-8529

静岡市駿河区大谷 836

静岡大学理学部数学科

E-mail: skkimur@ipc.shizuoka.ac.jp