Fermat 型超曲面の Hilbert-Kunz 重複度の極限値に関する考察

名古屋大学 多元数理科学研究科
森田 啓

アドバイザー　吉田 健一　准教授

本発表は，修士論文で行った Gessel-Monsky の論文のサーベイにもとづく．

発表の概要

- Hilbert-Kunz 重複度，Fermat 型超曲面，それらの背景
- Hilbert-Kunz 重複度の極限を求める Gessel-Monsky の主定理の紹介
    - 主定理を用いた計算
- 次元の低い場合に Hilbert-Kunz 重複度そのものを求めるアルゴリズム
    - アルゴリズムを用いた計算

$(R, \mathfrak{m})$：可換な Noether 局所環，$p = \mathrm{char}\, R > 0, d = \dim R \geq 1$

定義 1

$\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して，イデアル I の **Hilbert-Kunz 重複度** $e_{\mathrm{HK}}(I)$ を

$$e_{\mathrm{HK}}(I) = \lim_{n \to \infty} \frac{\ell(R/I^{[p^n]})}{p^{dn}}$$

により定める．ただし，$\ell(\text{-})$ は R 加群の長さを表し，$I^{[p^n]} = (a^{p^n} | a \in I)$ である．

なお，R 自身の Hilbert-Kunz 重複度を

$$e_{\mathrm{HK}}(R) = e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{m})$$

として定める．

定義 2

$d_1, \ldots, d_s$: 2 以上の整数
このとき,

$$R_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[|x_1, \ldots, x_s|] \Big/ (x_1^{d_1} + \cdots + x_s^{d_s})$$

を **Fermat 型超曲面**と呼ぶ.

定理 3 (Han-Monsky [HM])

$d_1, \ldots, d_s$: 2 以上の整数
Fermat 型超曲面

$$R_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[|x_1, \ldots, x_s|]/(x_1^{d_1} + \cdots + x_s^{d_s})$$

の *Hilbert-Kunz* 関数 $\ell(R_p/\mathfrak{m}^{[p^n]})$ は，十分大きな n に対して

$$\ell(R_p/\mathfrak{m}^{[p^n]}) = c \cdot p^{dn} - (l^\sharp)^n$$

の形に表される．ここで，c，$l^\sharp$ は正の有理数 *(?)* 実数*?*である．

この定理は，Hilbert-Kunz 重複度を求めるアルゴリズムを与える．

Hilbert-Kunz 重複度の例

$$e_{\mathrm{HK}}(k[|x_1, \ldots, x_s|]) = 1,$$

$$e_{\mathrm{HK}}\left(\frac{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[|x, y, z|]}{(xy - z^n)}\right) = 2 - \frac{1}{n},$$

$$e_{\mathrm{HK}}\left(\frac{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[|x, y, z, w|]}{(xw - yz)}\right) = \frac{4}{3},$$

$$e_{\mathrm{HK}}\left(\frac{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[|x_1, x_2, x_3, x_4, x_5|]}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2)}\right) = \frac{29p^2 + 15}{24p^2 + 12}.$$

- $e_{\mathrm{HK}}(R_p)$ を求める計算は難しい (p に依存する).
- $\displaystyle\lim_{p\to\infty} e_{\mathrm{HK}}(R_p)$ を求めることは比較的易しい.

定理 4 ([GM])

$R_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x_1, \ldots, x_s]\Big/(x_1^2 + \cdots + x_s^2)$ とするとき，

$$\lim_{p\to\infty} e_{\mathrm{HK}}(R_p) = 1 + (\sec z + \tan z \text{ を冪級数展開したときの } z^{s-1} \text{の係数})$$

である．ただし，$s = d + 1$ である．

$$\sec z + \tan z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{5}{24}z^4 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{61}{720}z^6 + \cdots$$ なので,

s	$1 + (\sec z + \tan z$ の z^{s-1} の係数$)$
3	$\frac{3}{2}$
4	$\frac{4}{3}$
5	$\frac{29}{24}$

Hilbert-Kunz 重複度の例 (再掲)

$$e_{\mathrm{HK}}(k[|x_1, \ldots, x_s|]) = 1,$$

$$e_{\mathrm{HK}}\left(\frac{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[|x,y,z|]}{(xy - z^n)}\right) = 2 - \frac{1}{n},$$

$$e_{\mathrm{HK}}\left(\frac{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[|x,y,z,w|]}{(xw - yz)}\right) = \frac{4}{3},$$

$$e_{\mathrm{HK}}\left(\frac{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[|x_1,x_2,x_3,x_4,x_5|]}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2)}\right) = \frac{29p^2 + 15}{24p^2 + 12}.$$

定理 5 ([GM])

$d_1, \dots, d_s$: 2 以上の整数
$R_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x_1, \dots, x_s] \Big/ (x_1^{d_1} + \cdots + x_s^{d_s})$
このとき，

$$\lim_{p\to\infty} e_{\mathrm{HK}}(R_p) = \frac{d_1 \cdots d_s \cdot 2^{1-s}}{(s-1)!}\Big(C_0 + 2\sum_{\lambda>0} C_\lambda\Big)$$

が成り立つ．ただし，C_λ は次のように定められる．
$\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ かつ $\left(\frac{\epsilon_1}{d_1} + \cdots + \frac{\epsilon_s}{d_s}\right) > 2\lambda$ となる $\epsilon_1, \dots, \epsilon_s$ に関する和 $\sum$ を用いて，

$$C_\lambda = \sum (\epsilon_1 \dots \epsilon_s)\left(\frac{\epsilon_1}{d_1} + \cdots + \frac{\epsilon_s}{d_s} - 2\lambda\right)^{s-1}.$$

である ($\lambda \in \mathbb{Z}$).

証明のスケッチ

系 6 ([GM])

$A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_s]$ とし，$D_p(k_1, \ldots, k_s) = \ell\left(A \Big/ (\sum_{i=1}^{s} x_i, x_1^{k_1}, \ldots, x_s^{k_s})\right)$ とおく．

任意の p に対して，$a_i = \dfrac{p}{d_i} + O(1)$ となる整数 $a_1, \ldots, a_s \geq 0$ が与えられたとする．このとき k が存在し，任意の p に対して

$$\left| e_{\mathrm{HK}}(R_p) - dp^{1-s} D_p(a_1, \ldots, a_s) \right| \leq \frac{k}{p}$$

が成り立つ．ただし $d = d_1 \cdots d_s$ とする．

$\lfloor x \rfloor$ によって，x の切り下げを表すことにする．

定理 7 ([HM])

$$\gamma = \left\lfloor \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} (a_i - 1) \right\rfloor,$$ $a_1, \ldots, a_s$ は $1 \leq a_i \leq p$ をみたす整数とするとき，

$$D_p(a_1, \ldots, a_s) = \text{「} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{i=1}^{s} \left(\frac{1 - t^{a_i}}{1 - t} \right) \text{における } t^{\gamma + \lambda p} \text{の係数} \right) \text{」}$$

が成り立つ．

命題 8 ([GM])

$\sum_{i=1}^{s} a_i \equiv s \pmod 2$ となるように a_i を選び，$\gamma = \frac{1}{2}\sum(a_i - 1)$ とするとき，$\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{1-t^{a_i}}{1-t}\right)$ における $t^{\gamma-\lambda p}$ の係数は

$$\frac{2^{1-s}}{(s-1)!} C_\lambda p^{s-1} + O(p^{s-2})$$

に等しい.

証明のスケッチ終わり

$\lim_{p\to\infty} e_{\mathrm{HK}}(R_p)$ は p によらず，C_λ を用いて書ける．これによって，形式的に計算することが出来る.

定理 5([GM])(再掲)

$d_1, \ldots, d_s$: 2 以上の整数
$R_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x_1, \ldots, x_s] \Big/ (x_1^{d_1} + \cdots + x_s^{d_s})$
このとき,

$$\lim_{p \to \infty} e_{\mathrm{HK}}(R_p) = \frac{d_1 \cdots d_s \cdot 2^{1-s}}{(s-1)!} (C_0 + 2 \sum_{\lambda > 0} C_\lambda)$$

が成り立つ. ただし, C_λ は次のように定められる.
$\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ かつ $\left(\frac{\epsilon_1}{d_1} + \cdots + \frac{\epsilon_s}{d_s} \right) > 2\lambda$ となる $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s$ に関する和 $\sum$ を用いて,

$$C_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} (\epsilon_1 \ldots \epsilon_s) \left(\frac{\epsilon_1}{d_1} + \cdots + \frac{\epsilon_s}{d_s} - 2\lambda \right)^{s-1}.$$

である.

s が小さい場合に計算すると以下が分かる．

定理 9 ($s = 3$ のとき)

$2 \leq a \leq b \leq c$ に対して $h = x^a + y^b + z^c$ とする．つまり
$R_p = \dfrac{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x, y, z]}{(x^a + y^b + z^c)}$ とする．このとき，

$$\lim_{p \to \infty} e_{\mathrm{HK}}(R_p)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{abc}{4}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right) + \dfrac{a+b+c}{2} & \left(-\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq 0 \text{ のとき}\right) \\ a & \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c} \geq 0 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

である．

なお，このとき $e_{\mathrm{HK}}(R_p)$ は一般には知られていない．

先程述べた

定理 3 (Han-Monsky[HM])(再掲)

$d_1, \ldots, d_s$: 2 以上の整数
Fermat 型超曲面

$$R_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[|x_1, \ldots, x_s|]/(x_1^{d_1} + \cdots + x_s^{d_s})$$

の Hilbert-Kunz 関数 $\ell(R_p/\mathfrak{m}^{[p^n]})$ は，十分大きな n に対して

$$\ell(R_p/\mathfrak{m}^{[p^n]}) = c \cdot p^{(s-1)n} - (l^\sharp)^n$$

の形に表される．ここで，c，$l^\sharp$ は正の有理数である．

より得られる，$e_{\mathrm{HK}}(R)$ を求めるアルゴリズムを次に示す．

$d_1 = \cdots = d_s = 2$ とする．

系 10 ([Y])

$h = x_1^2 + \cdots + x_s^2$ のとき，$R_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x_1, \ldots, x_s] \Big/ (x_1^2 + \cdots + x_s^2)$ の Hilbert-Kunz 重複度について，

$$e_{\mathrm{HK}}(R_p) = 1 + \frac{e_1(h) - p^{s-1}}{p^{s-1} - l^\sharp_{s-1}} \tag{1}$$

が成り立つ．ここで，$e_1(h)$ および $l^\sharp_{s-1}$ は行列計算により得られる有理数である．

続いて，$e_1(h)$ および $l^\sharp_{s-1}$ を求める行列計算について示そう．

補題 11 ([Y])

$$e_1(h) = N_a^s \text{の} \ (1,1) \ \text{成分}$$

が成り立つ．ここで，N_a は以下の $p \times p$ 行列とする ($p = 2a+1$).

$$N_a = \left[\begin{array}{ccccccccc}
2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & & & & \\
2 & & \iddots & \iddots & \vdots & \ddots & & \mathbf{0} & \\
\vdots & \iddots & \iddots & & \vdots & & \ddots & & \\
2 & \iddots & & & \vdots & & & \ddots & \\
1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\
 & \ddots & & & \vdots & & & \iddots & 2 \\
 & & \ddots & & \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\
 & \mathbf{0} & & \ddots & \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\
 & & & & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2
\end{array}\right] \leftarrow a+1 \ \text{行目}$$

補題 12 ([Y])

$$I^{\sharp}_{s-1} = M_a^s \text{の} \ (1,1) \ \text{成分}$$

が成り立つ．ここで，M_a は以下の $p \times p$ 行列とする ($p = 2a+1$).

$$M_a = \begin{bmatrix}
 & & & & 1 & & & & \\
 & 0 & & \iddots & \vdots & \ddots & & 0 & \\
 & & \iddots & & \vdots & & \ddots & & \\
 & \iddots & & & \vdots & & & \ddots & \\
1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\
 & \ddots & & & \vdots & & & \iddots & \\
 & & \ddots & & \vdots & & \iddots & & \\
 & 0 & & \ddots & \vdots & \iddots & & 0 & \\
 & & & & 1 & & & &
\end{bmatrix} \leftarrow a+1 \text{行目}$$

$[A]_{a,b}$ により行列 A の (a,b) 成分を表すことにすると,

$$[N_a^{s+1}]_{1,a+1-k} = p^s + 2\sum_{r=a}^{a-k+1}\{[N_a^s]_{1,a+1-r} - p^{s-1}\} \tag{2}$$

$$[M_a^{s+1}]_{1,m} = [M_a^s]_{1,a+1} + 2\sum_{k=1}^{m-1}[M_a^s]_{1,a+1-k} \tag{3}$$

が成り立つことが分かる.

Table: $s = 11$ までの $e_{\mathrm{HK}}(R_p)$

s	$e_{\mathrm{HK}}(R_p)$
5	$\frac{29}{24} \leq \frac{29p^2+15}{24p^2+12} \leq \frac{30}{24} = \frac{5}{4}$
6	$\frac{17}{15} \leq \frac{17p^2+12}{15p^2+10} \leq \frac{2^3}{2^3-1}$
7	$\frac{781}{720} \leq \frac{781p^4+656p^2+315}{720p^4+570p^2+270} \leq \frac{2^3+1}{2^3} = \frac{810}{720}$
8	$\frac{332}{315} \leq \frac{332p^4+304p^2+192}{315p^5+273p^2+168} \leq \frac{2^4}{2^4-1}$
9	$\frac{41705}{40320} \leq \frac{41705p^6+39997p^4+30267p^2+14175}{40320p^6+36904p^4+27104p^2+12600} \leq \frac{2^4+1}{2^4}$
10	$\frac{2897}{2835} \leq \frac{2897p^6+2846p^4+2384p^2+1440}{2835p^6+2682p^4+2178p^2+1296} \leq \frac{2^5}{2^5-1}$
11	$\frac{3679321}{3628800} \leq \frac{3679321p^8+3658546p^6+3271684p^4+2359134p^2+1091475}{3628800p^8+3504150p^6+3042990p^4+2154690p^2+992250} \leq \frac{2^5+1}{2^5}$

予想 13 ([WY3])

R が非正則環で *unmixed* のとき ($p = \mathrm{char} R > 2,\ d = \dim R \geq 1$),

$$e_{\mathrm{HK}}(R) \geq 1 + (\sec z + \tan z \text{ を冪級数展開したときの } z^d \text{ の係数})$$

が成り立つ.

$R_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x,y,z]\Big/(x^a + y^b + z^c)$ について，以下のときは $e_{\mathrm{HK}}(R_p)$ の値は知られている．

(A_n 型) $h = x^2 + y^2 + z^{n+1}$ のとき，

$$e_{\mathrm{HK}}(R_p) = 2 - \frac{1}{n+1} \ (p \geq 3)$$

(E_8 型)$h = x^2 + y^3 + z^5$ のとき，

$$e_{\mathrm{HK}}(R_p) = \begin{cases} 2 & (p = 2, 3, 5) \\ 2 - \frac{1}{120} & (p \geq 7) \end{cases}$$

$a \geq 3$ のとき $e_{\mathrm{HK}}(R_p)$ は一般には知られていない．そこで $\lim\limits_{p\to\infty} e_{\mathrm{HK}}(R_p)$ を求めるに至った．

定理 14 ($s=4$ のとき)

$2 \le a \le b \le c \le d$ に対して $h = x^a + y^b + z^c + w^d$ とする．つまり $R_p = \dfrac{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x,y,z,w]}{(x^a+y^b+z^c+w^d)}$ とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{p\to\infty} e_{\mathrm{HK}}(R_p) \\
&= \begin{cases}
-\dfrac{abc}{4}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)+\dfrac{a+b+c}{2}-\dfrac{abc}{12d^2} & \left(-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{d}\ge 0 \text{ のとき}\right) \\[2ex]
\dfrac{abcd}{24}\left(\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}-\dfrac{1}{c^3}-\dfrac{1}{d^3}\right)+\dfrac{1}{4}(b+c+d) & \\
\quad -\dfrac{bcd}{8a}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)-\dfrac{acd}{8b}\left(-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right) & \\
\quad -\dfrac{abd}{8c}\left(-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{d}\right)-\dfrac{abc}{8d}\left(-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) & \left(\left|-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right|-\dfrac{1}{d}\le 0 \text{ のとき}\right) \\[2ex]
a & \left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{d}\ge 0 \text{ のとき}\right)
\end{cases}
\end{aligned}
$$

である．

- Gessel, I. and Monsky, P., The limit as $p \to \infty$ of the Hilbert-Kunz multiplicity of $\sum x_i^{d_i}$, arXiv:1007.2004v1. [math.AC] 12 Jul 2010.
- Han, C. and Monsky, P., Some surprising Hilbert-Kunz functions, Math. Z. **214**(1993), 119-135.
- Huneke, C., Tight closure and its applications. American Mathematical Society, 1996.
- Kunz, E., Characterizations of regular local rings of characteristic p, Amer. J. Math. **41**(1969), 772-784.
- Kunz, E., On Noetherian rings of characteristic p, Amer. J. Math. **98**(1976), 999-1013.

- Monsky,P., The Hilbert-Kunz function, Math. Ann. **263**(1983), 43-49.
- Watanabe, K.-i. and Yoshida, K., Hilbert-Kunz Multiplicity and an Inequality between Multiplicity and Colength, J. Algebra., **230**(2000), 295-317.
- Watanabe, K.-i. and Yoshida, K., Hilbert-Kunz multiplicity of two-dimensional local rings, Nagoya Math. J. **162**(2001), 87-110.
- Watanabe, K.-i. and Yoshida, K., Hilbert-Kunz multiplicity of three-dimensional local rings, Nagoya Math. J. **177**(2005), 47-75.
- Yoshida, K, Small Hilbert-Kunz multiplicity and (A_1) type singularity, The 4th JAPAN-VIETNAM Joint Seminar on Commutative Algebra,2009, 283-295.