巴系イデアルのヒルベルト係数の有限性とその計算方法について

大関　一秀

1. 序

本報告の目的は，Noether 局所環内の巴系イデアルについて，そのヒルベルト係数たちがいつ一様な境界を持つか，さらには，そのときの無駄のない境界はどの様なものかについて考察することにある．

以下，A を可換な Noether 局所環とし，その極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とし Krull 次元を $d = \dim A > 0$ と表す．簡単の為, 環 A の剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限体と仮定する．A-加群 M に対して，$\ell_A(M)$ にて M の長さを表す．このとき，環 A 内の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して，整数 $\{\mathrm{e}_I^i(A)\}_{0\le i\le d}$ たちが存在して，十分大きい整数 $n \gg 0$ に対して，等式

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = \mathrm{e}_I^0(A)\binom{n+d}{d} - \mathrm{e}_I^1(A)\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d\mathrm{e}_I^d(A)$$

が成り立つことが良く知られている．これを，イデアル I のヒルベルト多項式と呼び，各係数 $\mathrm{e}_I^i(A)$ をイデアル I の第 i ヒルベルト係数と呼ぶ．特に，$\mathrm{e}_I^0(A)$ はイデアル I の重複度と呼ばれる．

各整数 $1 \le i \le d$ に対して，集合

$$\Lambda_i(A) = \{\mathrm{e}_Q^i(A) \mid Q \text{ は環 } A \text{ 内の巴系イデアル}\}$$

を定める．本報告の最初の目的は，いつ $\Lambda_i(A)$ たちが有限集合をなすかについて考察することである．

本報告の最初の主結果は次の通りである． 但し，局所環 A が generalized Cohen-Macaulay であるとは, 全ての整数 $i \ne d$ に対して，環 A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する局所コホモロジー加群 $\mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(A)$ たちが有限生成をなすことである．

定理 1.1. *A は Noether 局所環で $d \ge 2$ とする．このとき，次の 2 条件は互いに同値である．*

(1) *A は generalized Cohen-Macaulay 環である．*
(2) *任意の整数 $1 \le i \le d$ に対して，$\Lambda_i(A)$ たちは有限集合をなす．*

この定理 1.1 により，集合 $\Lambda_i(A)$ の有限性に対する完全な解答を与えることが出来た．その一方で，この有限性問題とは別に，generalized Cohen-Macaulay 局所環 A 内の巴系イデアル Q の各ヒルベルト係数 $\mathrm{e}_Q^i(A)$ について，無駄のない上限値，及び，下限値を与えることが必要であると考えられる．

これに対して，第 1 ヒルベルト係数 $\mathrm{e}_Q^1(A)$ については，既に，次の様なことが知られている．但し，任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して，$h^i(A) = \ell_A(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(A))$ と表す．

$d = 1$ のとき，いつも $\mathrm{e}_Q^1(A) = -h^0(A)$ である．$d \geq 2$ のときも，A が generalized Cohen-Macaulay 環ならば，環 A 内の任意の巴系イデアル Q に対して，不等式

$$0 \geq \mathrm{e}_Q^1(A) \geq -\sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A)$$

が成り立つ ([6, Theorem 8], [2, Lemma 2.4])．このとき，$\operatorname{depth} A > 0$ という仮定の下で，等式 $\mathrm{e}_Q^1(A) = -\sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A)$ が成り立つことと，Q が A 内で標準的な巴系イデアルをなすことが必要十分であることが従う ([7, Korollar 3.2], [3, Theorem 2.1])．また，[1] によって，等式 $\mathrm{e}_Q^1(A) = 0$ を満たす巴系イデアル Q を持つような局所環の特徴づけを与えられている．このように，巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数 $\mathrm{e}_Q^1(A)$ については，これまでの研究でかなりのことが分かっているといえる．

では，巴系イデアル Q の第 2 ヒルベルト係数 $\mathrm{e}_Q^2(A)$ はどの様になっているかという自然な問が考えられる．この問に対して，まずは，$d = 2$ であって $\operatorname{depth} A > 0$ という仮定の下で, 任意の A 内の巴系イデアル Q に対して，不等式

$$-h^1(A) \leq \mathrm{e}_Q^2(A) \leq 0$$

が成り立つことを示す．このとき，等式 $\mathrm{e}_Q^2(A) = 0$ が成り立つことと巴系イデアル Q の生成系 a, b が A 内で d-列をなすことが必要十分条件である．さらに，A が generalized Cohen-Macaulay 環で $d \geq 3$ のとき, 任意の A 内の巴系イデアル Q に対して，不等式

$$-\sum_{j=2}^{d-1} \binom{d-3}{j-2} h^j(A) \leq \mathrm{e}_Q^2(A) \leq \sum_{j=1}^{d-2} \binom{d-3}{j-1} h^j(A)$$

が成り立つ (定理 3.5).

本報告のもう一つの主結果は次の通りである．次の定理は上述の不等式の上限値

$$\mathrm{e}_Q^2(A) \leq \sum_{j=1}^{d-2} \binom{d-3}{j-1} h^j(A)$$

は，無駄のないものであるということを示している． そして，いつ等式 $\mathrm{e}_Q^2(A) = \sum_{j=1}^{d-2}\binom{d-3}{j-1}h^j(A)$ が成り立つかについても言及している．

定理 1.2. A は *generalized Cohen-Macaulay* 環であって，$d \geq 3$ かつ $\operatorname{depth} A > 0$ とする．Q を環 A 内の巴系イデアルとする．このとき，次の 2 条件は互いに同値である．

(1) $\mathrm{e}_Q^2(A) = \sum_{j=1}^{d-2}\binom{d-3}{j-1}h^j(A)$ である．

(2) 元 $a_1, a_2, \cdots, a_d \in A$ が存在して，次の条件を満たす．

  (a) $Q = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$,

  (b) $a_1, a_2, \cdots, a_d$ は A 内で d-列をなし，そして

  (c) 任意の整数 $j \geq 1$，$k \geq 0$ で，$j + k \leq d - 2$ を満たすようなものに対して，$Q{\cdot}\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^j(A/(a_1, a_2, \cdots, a_k)) = (0)$ が成り立つ．

このとき，さらに次の条件が従う．

(i) 各整数 $3 \leq i \leq d-1$ に対して，$\mathrm{e}_Q^i(A) = (-1)^i{\cdot}\sum_{j=1}^{d-i}\binom{d-i-1}{j-1}h^j(A)$ であり，

(ii) $\mathrm{e}_Q^d(A) = 0$ が成り立つ．

しかしながら，現在のところ，巴系イデアル Q の第 3 ヒルベルト係数 $\mathrm{e}_Q^3(A)$ について，その無駄のない上限値，及び，下限値は分かっていない．

ここで，本報告の構成を述べたい．第 2 節にて，定理 1.1 の証明を与える．定理 1.2 については，第 3 節にて証明する．第 3 節では，定理 1.2 の証明の際に必要となる幾つかの結果についても紹介したい．また，$\dim A = 2$ のとき，いつ等式 $\mathrm{e}_Q^2(A) = 0$ が成り立つかについても，第 3 節にて考察する．

以下，A は可換な Noether 局所環で，その極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とし，Krull 次元を $d = \dim A > 0$ と表す．本報告を通して，いつも剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限と仮定する．環 A 内の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して，

$$\mathrm{R}(I) = A[It], \quad \mathrm{R}'(I) = A[It, t^{-1}], \quad \mathrm{G}(I) = \mathrm{R}'(I)/t^{-1}\mathrm{R}'(I)$$

と定める．但し，t は環 A 上の不定元とする．次数環 $R = \mathrm{R}(I)$ の次数付極大イデアルを $\mathcal{M} = \mathfrak{m}R + R_+$ と表す．次数付 R-加群 L に対して，L の $\mathcal{M}$ に関する局所コホモロジー加群を $\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^i(L)$ と表す．各整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して，L の第 n 次の斉次部分を $[L]_n$ と表す．各 $\alpha \in \mathbb{Z}$ に対して，$L(\alpha)$ と表したら，$[L(\alpha)]_n = L_{\alpha+n}$ によって次数付けを与えられた次数付 R-加群とする．

2. 定理 1.1 の証明

本節では，定理 1.1 の証明を与える．

定理 1.1 の (1) $\Rightarrow$ (2) の証明する上で，generalized Cohen-Macaulay 環内の巴系イデアル Q について，随伴次数環 $\mathrm{G}(Q)$ の Castelnuovo-Mumford 正則性 $\operatorname{reg}\mathrm{G}(Q)$ の一様な境界の存在が鍵となる．そこでまずは，Castelnuovo-Mumford 正則性の定義から紹介したい．

環 A 内の巴系イデアル Q に対して，

$$\mathrm{R}(Q) = A[Qt], \quad \mathrm{R}'(Q) = A[Qt, t^{-1}], \quad \mathrm{G}(Q) = \mathrm{R}'(Q)/t^{-1}\mathrm{R}'(Q)$$

を，それぞれ，巴系イデアル Q の Rees 代数，拡大 Rees 代数, そして，随伴次数環と呼ぶ．但し, t は環 A 上の不定元とする．$\mathcal{M} = \mathfrak{m}R + R_+$ を $R = \mathrm{R}(Q)$ の次数付極大イデアルとする．このとき，各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して，$\mathrm{G}(Q)$ の a-不変量を

$$\mathrm{a}_i(\mathrm{G}(Q)) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid [\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(\mathrm{G}(Q))]_n \neq (0)\}$$

と表し，

$$\mathrm{reg}\mathrm{G}(Q) = \max\{\mathrm{a}_i(\mathrm{G}(Q)) + i \mid i \in \mathbb{Z}\},$$

と定め，これを次数環 $\mathrm{G}(Q)$ の Castelnuovo-Mumford 正則性と呼ぶ.

ここで，Linh と Trung [5] による次の定理を紹介したい．これは，generalized Cohen-Macaulay 環内の巴系イデアル Q について，$\operatorname{reg}\mathrm{G}(Q)$ の一様な境界を与えている．

定理 2.1 ([5], Theorem 2.3)**.** A は *generalized Cohen-Macaulay* 環とし，Q は環 A 内の巴系イデアルとする．このとき，

(1) $d = 1$ ならば，$\operatorname{reg}\mathrm{G}(Q) \leq \max\{\mathrm{I}(A) - 1, 0\}$ である．

(2) $d \geq 2$ ならば，$\operatorname{reg}\mathrm{G}(Q) \leq \max\{(4\mathrm{I}(A))^{(d-1)!} - \mathrm{I}(A) - 1, 0\}$ である．

従って，定理 1.1 の含意 (1) $\Rightarrow$ (2) を証明する上で，次の結果が鍵となる．但し，各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して，$h_i(A) = \ell_A(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A))$ と表し，$\mathrm{I}(A) = \sum_{j=0}^{d-1}\binom{d-1}{j}h^j(A)$ と定める．

定理 2.2. A を *generalized Cohen-Macaulay* 環とする．Q を環 A 内の巴系イデアルとし，$r = \operatorname{reg}\mathrm{G}(Q)$ と定める．このとき，次が正しい．

(1) $|\mathrm{e}^1_Q(A)| \leq \mathrm{I}(A)$ である．

(2) 各整数 $2 \leq i \leq d$ に対して，$|\mathrm{e}^i_Q(A)| \leq 3 \cdot 2^{i-2}(r+1)^{i-1}\mathrm{I}(A)$ である．

Proof. [4, Section 2] を参照. $\square$

従って，generalized Cohen-Macaulay 環内の巴系イデアル Q について，定理 2.2 にて与えた $\mathrm{e}_Q^i(A)$ たちの境界と，[5, Theorem 2.3] によって与えられた $r = \operatorname{reg} \mathrm{G}(Q)$ の一様な境界を用いることにより，任意の整数 $1 \leq i \leq d$ に対して，集合 $\Lambda_i(A)$ の有限性を示すことが出来る.

以上より，定理 1.1 の含意 (1) $\Rightarrow$ (2) が示せた. 含意 (2) $\Rightarrow$ (1) の証明については，[4, Section 2] を参照して頂きたい.

3. 巴系イデアルの第 2 ヒルベルト係数 $e_Q^2(A)$ について

本節では，巴系イデアル Q の第 2 ヒルベルト係数 $\mathrm{e}_Q^2(A)$ について考えたい.

定理 1.1 にて与えた境界 $|\mathrm{e}_Q^2(A)| \leq 3(r+1)\mathrm{I}(A)$ はとても大きなもので，無駄がある. そこで，第 2 ヒルベルト係数 $\mathrm{e}_Q^2(A)$ の無駄のない境界を与えることを目標とする. 各結果の詳しい証明は，[4, Section 3] を参照して頂きたい.

まずは，$d = 2$ の場合に次の定理が与えられる.

定理 3.1. $d = 2$ であって，$\operatorname{depth} A > 0$ とする. $Q = (x, y)$ を環 A 内の巴系イデアルとし，x はイデアル Q の上表元とする. このとき，

$$-h^1(A) \leq \mathrm{e}_Q^2(A) \leq 0$$

であって，さらに次の 3 条件が互いに同値である.

(1) $\mathrm{e}_Q^2(A) = 0$ である.
(2) x, y は環 A 内で d-列をなす.
(3) 任意の整数 $\ell \geq 1$ に対して，x^ℓ, y^ℓ は環 A 内で d-列をなす.

定理 3.1 を示す際に，次の補題を用いる.

補題 3.2. $d = 2$ とし $\operatorname{depth} A > 0$ とする. $Q = (x, y)$ を環 A 内の巴系イデアルとし，x はイデアル Q の上表元とする. このとき，十分大きな整数 $n \gg 0$ に対して，

$$\mathrm{e}_Q^2(A) = -\ell_A\left(\frac{[(x^\ell) : y^\ell] \cap Q^\ell}{(x^\ell)}\right) \leq 0$$

が成り立つ.

この補題3.2より，定理3.1の不等式を直ちに示すことが出来る．含意(1) $\Rightarrow$ (3)の証明も，この補題3.2によって与えられる(詳細は[4, Section 3]参照)．含意(3) $\Rightarrow$ (2)は自明である．

含意(2) $\Rightarrow$ (1)の証明は，次の命題3.3によって与えられる．この命題3.3から，d-列によって生成されたイデアルが良い性質を持つということも分かる．

命題 3.3. $d > 0$とし，$Q = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$を環$A$内の巴系イデアルとする．$G = \mathrm{G}(Q)$, $R = \mathrm{R}(Q)$と表す．各整数$1 \leq i \leq d$に対して，$f_i = a_i t \in R$と定める．$a_1, a_2, \cdots, a_d$は環A内でd-列をなすとする．このとき，次の条件が正しい．但し，整数$1 \leq i \leq d$に対して，$Q_i = (a_1, a_2, \cdots, a_i)$と表す．

(1) $\mathrm{e}_Q^0(A) = \ell_A(A/Q) - \ell_A([Q_{d-1} : a_d]/Q_{d-1})$である．
(2) 整数$1 \leq i \leq d-1$に対して$(-1)^i \mathrm{e}_Q^i(A) = h^0(A/Q_{d-i}) - h^0(A/Q_{d-i-1})$であって，$(-1)^d \mathrm{e}_Q^d(A) = h^0(A)$である．
(3) 任意の整数$n \geq 0$に対して，$\ell_A(A/Q^{n+1}) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \mathrm{e}_Q^i(A) \binom{n+d-i}{d-i}$が成り立つ．よって，$\ell_A(A/Q) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \mathrm{e}_Q^i(A)$である．
(4) $f_1, f_2, \cdots, f_d$はG内でd-列をなす．
(5) $\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^0(G) = [\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^0(G)]_0 \cong \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^0(A)$が成り立つ．但し，$\mathcal{M} = \mathfrak{m}R + R_+$である．
(6) 任意の$n > -i$, $i \in \mathbb{Z}$に対して，$[\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^i(G)]_n = (0)$である．従って，$\operatorname{reg} G = 0$である．

また，剰余環$A/\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^0(A)$を経由し, 定理3.1を用いることで, 次の系が得られる．

系 3.4. $d = 2$とし，Qは環A内の巴系イデアルとする．このとき，

$$h^0(A) - h^1(A) \leq \mathrm{e}_Q^2(A) \leq h^0(A)$$

が成り立つ．

次に，$d \geq 3$の場合を考えたい．そこで，巴系イデアルQの第2次ヒルベルト係数$\mathrm{e}_Q^2(A)$の境界を与えることから始める．

次の命題3.5の不等式は，系3.4によって与えられた$d = 2$の場合の不等式を用いて，次元dに関する帰納法によって証明することが出来る．

定理 3.5. *A は generalized Cohen-Macaulay 環で，$d = \dim A \geq 3$ とする．$Q = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$ を環 A 内の巴系イデアルとする．このとき，*

$$-\sum_{j=2}^{d-1}\binom{d-3}{j-2}h^j(A) \leq \mathrm{e}_Q^2(A) \leq \sum_{j=1}^{d-2}\binom{d-3}{j-1}h^j(A)$$

が成り立つ．さらに，等式 $\mathrm{e}_Q^2(A) = \sum_{j=1}^{d-2}\binom{d-3}{j-1}h^j(A)$ が成り立ち，かつ，$a_1, a_2, \cdots, a_d$ が Q についての上表元列をなすならば，任意の整数 $k \geq 0$，$j \geq 1$ で，$j+k \leq d-2$ を満たすものについて，$Q{\cdot}\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^j(A/(a_1, a_2, \cdots, a_k)) = (0)$ が成り立つ．

本報告の締めくくりに，定理 1.2 の証明を与える．

条件 (1) の仮定の下で，巴系イデアル Q の生成系 $a_1, a_2, \cdots, a_d$ が環 A 内で d-列をなしていたとすると，定理 3.5 と命題 3.3 より，条件 (2) 及び，最後の条件 (i), (ii) が全て従う．

従って，定理 1.2 を証明する上で次の定理が決定的となる．

定理 3.6. *A は generalized Cohen-Macaulay 環であって，$d = \dim A \geq 3$，$\operatorname{depth} A > 0$ とする．Q を環 A 内の巴系イデアルとし，$\mathrm{e}_Q^2(A) = \sum_{j=1}^{d-2}\binom{d-3}{j-1}h^j(A)$ とする．このとき，Q は環 A 内で d-列をなすような巴系によって生成される．*

References

[1] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, K. Ozeki, T. T. Phuong, and W. V. Vasconcelos, *Cohen–Macaulayness versus the vanishing of the first Hilbert coefficient of parameter ideals*, London Math. Soc., (2) 81 (2010), 679–695.

[2] S. Goto and K. Nishida, *Hilbert coefficients and Buchsbaumness of associated graded rings*, J. Pure and Appl. Algebra, Vol **181**, 2003, 61–74.

[3] S. Goto and K. Ozeki, *Buchsbaumness in local rings possessing first Hilbert coefficients of parameters*, Nagoya Math. J., 199 (2010), 95–105.

[4] S. Goto and K. Ozeki, *Uniform bounds for Hilbert coefficients of parameters*, preprint.

[5] C. H. Linh and N. V. Trung, *Uniform bounds in generalized Cohen-Macaulay rings*, J. Algebra, **304** (2006), 1147–1159.

[6] M. Mandal and J. K. Verma, *On the Chern number of an ideal*, Preprint 2008.

[7] P. Schenzel, *Multiplizitäten in verallgemeinerten Cohen-Macaulay-Moduln*, Math. Nachr., **88** (1979), 295–306.