正標数のアフィン空間への $\mathbb{G}_a$ 作用について

静岡大学教育学部

谷本　龍二

序

k を正標数 p の代数的閉体とし，$\mathbb{G}_a$ を k の加法群とする．V を k 上の有限次元ベクトル空間とし，V 上の多項式関数全体のなす環を $k[V]$ とあらわす．$\mathbb{G}_a$ を V に線形に作用させると，$\mathbb{G}_a$ は自然に $k[V]$ にも作用する．アフィン空間 $\mathrm{Spec}\, k[V]$ への $\mathbb{G}_a$ 作用による不動点集合が余次元 1 の超平面であるとき，V は余次元 1 の $\mathbb{G}_a$ 加群であるという．$\mathbb{G}_a$ 不変式環を $k[V]^{\mathbb{G}_a}$ であらわすことにする．

正標数の $\mathbb{G}_a$ 不変式論おける次の問題は未解決である．

問題　どのような線形表現 $\mathbb{G}_a \to GL(V)$ に対しても，$k[V]^{\mathbb{G}_a}$ は k 代数として有限生成である．

この問題は，付加的な条件のもと肯定的に解かれている．V が余次元 1 の $\mathbb{G}_a$ 加群であるとき，Fauntleroy [2] により肯定的に解かれている．また，V の次元が 3 のとき，Zariski の定理 [6] の系として，肯定的に解かれている．

本報告では，次の定理の証明をあたえる．

定理　V が余次元 1 の $\mathbb{G}_a$ 加群であるとき，$k[V]^{\mathbb{G}_a}$ は k 上の多項式環である．

定理の証明

V を定理の通りとする．Fauntleroy [2] は多項式環 $\mathrm{Spec}\, k[V]$ の適切な座標 $x_1, \ldots, x_n$ をとると，$\mathbb{G}_a$ 作用は次のように表示できることを示した．

$$\begin{cases} t \cdot x_i = x_i + f_i(t) x_n & (1 \leq i \leq n-1), \\ t \cdot x_n = x_n. \end{cases}$$

ただし，各 $f_i(t)$ は $\mathbb{G}_a$ 上の加法的関数である（すなわち，すべての $t, t' \in \mathbb{G}_a$ に対して，$f_i(t+t') = f_i(t) + f_i(t')$ である）．V は余次元 1 の $\mathbb{G}_a$ 加群であることより，$f_i(t)$ $(1 \leq i \leq n-1)$ のうち少なくとも一つは 0 でない．

一般性を失うことなく，次の 2 つの条件を仮定してよい．

(1)　すべての $1 \leq i \leq n-1$ に対し，$f_i(t) \neq 0$.

(2)　$n \geq 3$.

$k[V]^{\mathbb{G}_a}[1/x_n]$ の生成系を構成することから始める．$k[V]^{\mathbb{G}_a}[1/x_n]$ の生成系を記述するために，いくつかの記号を用意する．

次の形の多項式を p 多項式という．

$$\sum_{i=0}^{\ell} a_i t^{p^i} \qquad (\ell \geq 0,\ a_0, \ldots, a_\ell \in k).$$

Q を，p 多項式全体のなす集合とする．この Q に積 $\circ$ を，関数の合成により定める．すなわち，すべての $f(t), g(t) \in Q$ に対し，$f(t) \circ g(t) = f(g(t))$ で定める．この積と自然な和により，Q は環になる．t が，Q の積についての単位元（すなわち，$1_Q = t$）になる．以下，Q 加群といえば，左 Q 加群を意味する．k は Q の順同型像であるゆえ，Q は invariant basis property を持つ．すなわち，自由 Q 加群の階数はうまく定義されている．Q の左イデアルは単項イデアルである（[4, Theorem 1] 参照）．したがって，自由 Q 加群 Q^m の部分加群は階数 m 以下の自由加群になる（たとえば，[1, Proposition 2.1, page 47] を見よ）．

$\mathbb{G}_a$ 上の多項式関数について，加法的であることと，p 多項式であることは同値である．それゆえ，すべての $1 \leq i \leq n-1$ に対して，$f_i(t) \in Q$ である．

$f_1, \ldots, f_{n-1}$ で生成された Q の左イデアルは単項であるゆえ，

$$\sum_{i=1}^{n-1} Q f_i = Qh$$

となる $h \in Q$ が存在する．ゆえに，

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_i \circ f_i = h$$

となる $u_1, \ldots, u_{n-1} \in Q$ が存在し，かつ，

$$f_i = \varphi_i \circ h \qquad (1 \leq i \leq n-1)$$

となる $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \in Q$ が存在する．したがって，

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_i \circ \varphi_i = t.$$

補題 1　$\alpha := \sum_{i=1}^{n-1} u_i(x_i/x_n) \in k[V][1/x_n]$ は次の性質を持つ．

(1)　すべての $t \in \mathbb{G}_a$ に対し，$t \cdot \alpha = \alpha + h(t)$.

(2)　$\alpha \notin k[V]^{\mathbb{G}_a}[1/x_n]$.

(3)　すべての $1 \leq i \leq n-1$ に対し，$x_i/x_n - \varphi_i(\alpha) \in k[V]^{\mathbb{G}_a}[1/x_n]$.

(4)　$f \in k[V][1/x_n]$ が $f \notin k[V]^{\mathbb{G}_a}[1/x_n]$ を満たすとき, $\deg_t t \cdot f \geq \deg_t t \cdot \alpha$ が成り立つ.

(5)　以下の $k[V]^{\mathbb{G}_a}[1/x_n]$ の部分集合は, $k[V]^{\mathbb{G}_a}[1/x_n]$ の k 代数としての生成系をなす.

$$\left\{ \frac{x_i}{x_n} - \varphi_i(\alpha) \quad (1 \leq i \leq n-1), \qquad x_n, \qquad \frac{1}{x_n} \right\}.$$

補題 1 の証明　(1) 各 u_i は p 多項式である．それゆえ，すべての $t \in \mathbb{G}_a$ に対し,

$$t \cdot \alpha = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \left(\frac{x_i}{x_n} + f_i \right) = \alpha + h.$$

(2) $\alpha \in k[V]^{\mathbb{G}_a}[1/x_n]$ と仮定せよ. (1) により, $h = 0$ である．したがって，$f_i = \varphi_i \circ h = 0$. このことは，どの f_i も 0 でないことに反する.

(3) すべての φ_i は p 多項式である．それゆえ, すべての $t \in \mathbb{G}_a$ に対し,

$$\begin{aligned} t \cdot \left(\frac{x_i}{x_n} - \varphi_i(\alpha) \right) &= \frac{x_i}{x_n} + f_i - \varphi_i(\alpha + h) \\ &= \frac{x_i}{x_n} - \varphi_i(\alpha). \end{aligned}$$

(4) (3) により,

$$t \cdot \frac{x_i}{x_n} = \varphi_i(t \cdot \alpha) + \frac{x_i}{x_n} - \varphi_i(\alpha).$$

各 $t \cdot (x_i/x_n)$ は，$k[V]^{\mathbb{G}_a}[1/x_n]$ に係数を持つ $t \cdot \alpha$ の多項式である．それゆえ, $t \cdot f$ は次のように表すことができる.

$$t \cdot f = \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i (t \cdot \alpha)^i \qquad (\ \lambda_0, \ldots, \lambda_\ell \in k[V]^{\mathbb{G}_a}[1/x_n]\ )$$

$f \notin k[V]^{\mathbb{G}_a}[1/x_n]$ より, ある $1 \leq i \leq \ell$ について $\lambda_i \neq 0$ である．したがって，$\deg_t(t \cdot f) \geq \deg_t(t \cdot \alpha)$.

(5) 上記の (2) と (4) を用いて，アルゴリズム [5] を走らせばよい.　Q.E.D.

$\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \in Q$ のシチジー加群を次で定める.

$$\mathrm{Syz}\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) := \left\{ (q_1, \ldots, q_{n-1}) \in Q^{n-1} \mid \sum_{i=1}^{n-1} q_i \circ \varphi_i = 0 \right\}.$$

補題 2　$k[V][1/x_n]$ の k 部分代数 A を次で定める.

$$A := k\left[\sum_{i=1}^{n-1} q_i \left(\frac{x_i}{x_n} \right) \mid (q_1, \ldots, q_{n-1}) \in \mathrm{Syz}\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \right].$$

このとき，次が成り立つ.

(1) すべての $(q_1,\ldots,q_{n-1})\in Q^{n-1}$ に対し, 以下は同値である.

(a) $(q_1,\ldots,q_{n-1})\in \mathrm{Syz}\,(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$;

(b) $\sum_{i=1}^{n-1} q_i(x_i/x_n)\in k[V]^{\mathbb{G}_a}[1/x_n]$;

(c) $\sum_{i=1}^{n-1} q_i(x_i/x_n)\in A$.

(2) すべての $1\leq i\leq n-1$ に対し，$x_i/x_n-\varphi_i(\alpha)\in A$.

(3) $A[x_n,1/x_n]=k[V]^{\mathbb{G}_a}[1/x_n]$.

補題 2 の証明　(1)

$$t\cdot\left(\sum_{i=1}^{n-1} q_i\left(\frac{x_i}{x_n}\right)\right)=\sum_{i=1}^{n-1} q_i\left(\frac{x_i}{x_n}\right)+\sum_{i=1}^{n-1} q_i\circ f_i.$$

これより，(b) $\Rightarrow$ (a) は従う．A の定義より，(a) $\Rightarrow$ (c) は成り立つ．$A\subset k[V]^{\mathbb{G}_a}[1/x_n]$ より，(c) $\Rightarrow$ (b) が従う．

(2)

$$\begin{aligned}\frac{x_i}{x_n}-\varphi_i(\alpha) &= \frac{x_i}{x_n}-\varphi_i\left(\sum_{j=1}^{n-1} u_j\left(\frac{x_j}{x_n}\right)\right)\\ &= \sum_{j=1}^{i-1}(-\varphi_i\circ u_j)\left(\frac{x_j}{x_n}\right)+(t-\varphi_i\circ u_i)\left(\frac{x_i}{x_n}\right)+\sum_{j=i+1}^{n-1}(-\varphi_i\circ u_j)\left(\frac{x_j}{x_n}\right)\end{aligned}$$

であることより，各 $x_i/x_n-\varphi_i(\alpha)$ は次のようにあらわされる．$x_i/x_n-\varphi_i(\alpha)=\sum_{i=1}^{n-1} q_i(x_i/x_n)$. ただし，$(q_1,\ldots,q_{n-1})\in Q^{n-1}$．(1) の (b) $\Rightarrow$ (c) より，$x_i/x_n-\varphi_i(\alpha)\in A$.

(3) 上記の (1) と (2) と，補題 1 (5) から従う．　Q.E.D.

上記の補題から，$k[V][1/x_n]^{\mathbb{G}_a}$ の生成系は，$\mathrm{Syz}\,(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ の生成系から構成できることが分かった．次の補題は，$\mathrm{Syz}\,(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ が $n-2$ 個の元からなる基底を持つことを述べている．

補題 3　$\mathrm{Syz}\,(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ は階数 $n-2$ の自由 Q 加群である．

補題 3 の証明　写像 $\pi:Q^{n-1}\to Q$ を，$\pi(q_1,\ldots,q_{n-1})=\sum_{i=1}^{n-1} q_i\circ\varphi_i$ で定める．π は Q 線形写像である．その核 $\mathrm{Syz}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ は Q^{n-1} の部分 Q 加群であることより，$\mathrm{Syz}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ は自由 Q 加群である．Q は自由 Q 加群であるゆえ，完全列 $0\to\mathrm{Syz}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\to Q^{n-1}\to Q\to 0$ は分裂する．すなわち，$Q^{n-1}\cong\mathrm{Syz}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\oplus Q$．したがって，$\mathrm{Syz}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ の階数は $n-2$ である．　Q.E.D.

次の補題は，$\mathrm{Syz}\,(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ が（以下で述べられる意味の）独立な基底を持つことを述べている．

Q^m の零でない元 $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_s$ が独立であることを定義をするために，記号をいくつか用意する．

Q^m の零でない元 $\boldsymbol{q}$ は次の標準的分解を持つ．

$$\boldsymbol{q} = \sum_{i=0}^{r} \omega_i t^{p^{\alpha_i}}.$$

ただし，$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r$ 非負整数の増大列とし，ω_i $(1 \leq i \leq r)$ は k^m の零でないベクトルとする．α_r を $\deg \boldsymbol{q}$ であらわし，ω_r を $\mathrm{LV}(\boldsymbol{q})$ であらわす．

すべての $\ell \geq 0$ に対し，k^m の加法的関数 F^ℓ を

$$F^\ell(a_1, \ldots, a_m) = (a_1^{p^\ell}, \ldots, a_m^{p^\ell}).$$

で定める．すべての $\ell, \ell' \geq 0$ に対し $F^\ell \circ F^{\ell'} = F^{\ell+\ell'}$ が成り立ち，すべての $\ell \geq 0$ に対し F^ℓ は単射である．

$\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_s$ を Q^m の零でない元とする．$d_i = \deg \boldsymbol{q}_i$ $(1 \leq i \leq s)$ とし，$d = \max\{d_i \mid 1 \leq i \leq s\}$ とする．$\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_s$ が独立であるとは，k^m のベクトル

$$F^{d-d_1}(\mathrm{LV}(\boldsymbol{q}_1)), \ldots, F^{d-d_s}(\mathrm{LV}(\boldsymbol{q}_s))$$

が k 上線形独立であるときにいう．

補題 4　M を自由 Q 加群 Q^m の零でない部分加群とする．このとき，M は階数が m 以下の自由加群であり，M の基底で（上記の意味で）独立なものが存在する．

補題 4 の証明　M は有限自由 Q 加群であることより, M のある元 $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_s$ で

$$M = Q\boldsymbol{q}_1 \oplus \cdots \oplus Q\boldsymbol{q}_s$$

となるものが存在する．d_i と d を上記のようにおく．一般性を失うことなく，$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_s$ と仮定してよい．$d = d_s$ である．

$\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_s$ は独立でないと仮定せよ．すると，k^s の零でないベクトル $(a_1, \ldots, a_s)$ で

$$\sum_{i=1}^{s} a_i F^{d_s-d_i}(\mathrm{LV}(\boldsymbol{q}_i)) = 0$$

となるものが存在する．$N := \max\{i \mid a_i \neq 0\}$ とおくことにより，

$$\sum_{i=1}^{N} a_i F^{d_s-d_i}(\mathrm{LV}(\boldsymbol{q}_i)) = 0$$

をえる．k は代数的閉体であることより，各 $1 \leq i \leq N$ に対し，k の元 α_i で $\alpha_i^{p^{d_s-d_i}} = a_i$ となるものが存在する．それゆえ，

$$\sum_{i=1}^{N} F^{d_s-d_i}(\alpha_i \cdot \mathrm{LV}(\boldsymbol{q}_i)) = 0.$$

したがって，
$$\sum_{i=1}^{N} F^{d_N-d_i}(\alpha_i \cdot \mathrm{LV}(\boldsymbol{q}_i)) = 0.$$
$\beta_i = \alpha_i^{p^{d_N-d_i}}$ $(1 \leq i \leq N)$ とおくと，
$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i F^{d_N-d_i}(\mathrm{LV}(\boldsymbol{q}_i)) = 0$$
が成り立つ．この関係より，M の別の基底を次のように構成することができる．
$$\boldsymbol{q}'_N := \boldsymbol{q}_N + \frac{1}{\beta_N}\sum_{i=1}^{N-1}(\beta_i t^{p^{d_N-d_i}}) \circ \boldsymbol{q}_i$$
とおき，$i \neq N$ で $1 \leq i \leq s$ であるとき，$\boldsymbol{q}'_i := \boldsymbol{q}_i$ とおく．$\boldsymbol{q}'_N \in M$ であり，$\{\boldsymbol{q}'_i\}_{1\leq i\leq s}$ は M の基底をなす．$\deg \boldsymbol{q}'_N < \deg \boldsymbol{q}_N$ である．実際，$\boldsymbol{q}_N$ と $(1/\beta_N)\cdot\sum_{i=1}^{N-1}(\beta_i t^{p^{d_N-d_i}}) \circ \boldsymbol{q}_i$ の先頭項の係数ベクトルの和は次であたえられる．
$$\begin{aligned}\mathrm{LV}(\boldsymbol{q}_N) + \frac{1}{\beta_N}\sum_{i=1}^{N-1}\mathrm{LV}((\beta_i t^{p^{d_N-d_i}}) \circ \boldsymbol{q}_i) &= \mathrm{LV}(\boldsymbol{q}_N) + \frac{1}{\beta_N}\sum_{i=1}^{N-1}\beta_i \cdot F^{d_N-d_i}(\mathrm{LV}(\boldsymbol{q}_i)) \\ &= 0.\end{aligned}$$
したがって，
$$\sum_{i=1}^{s} \deg \boldsymbol{q}'_i < \sum_{i=1}^{s} \deg \boldsymbol{q}_i.$$
上記の議論より，独立でない基底 $\{\boldsymbol{q}_i\}_{1\leq i\leq s}$ があたえられると，M は，あたえられたものより小さい全次数を持つ別の基底を持つことが分かった．この議論を有限回繰り返すことにより，M の独立な基底がえられる．　Q.E.D.

補題 4 より，$\mathrm{Syz}\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ は独立な $n-2$ 個の元からなる基底を持つ．この $n-2$ 個の元を
$$u^{(i)} = (u_1^{(i)}, \ldots, u_{n-1}^{(i)}) \qquad (1 \leq i \leq n-2),$$
とおき，$u^{(i)}$ の次数を d_i とあらわすことにする．必要があるならば，その生成系 $\{u^{(i)}\}_{1\leq i\leq n-2}$ の順番を入れ替えて，生成系の次数は増加しているとしてよい．補題 2 (1) より，
$$U^{(i)} := x_n^{p^{d_i}} \sum_{j=1}^{n-1} u_j^{(i)}\left(\frac{x_j}{x_n}\right) \qquad (1 \leq i \leq n-2)$$
は $k[V]^{\mathbb{G}_a}$ の元である．
$$\varepsilon : k[V] \to k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$$
を x_n に 0 を代入する k 準同型とし，$y_i := \varepsilon(U^{(i)}) \in k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ $(1 \leq i \leq n-2)$ とする．

補題 5　$k[x_1,\dots,x_{n-1}]$ の元 $y_1,\dots,y_{n-2}$ は k 上代数的独立である．

補題 5 の証明　$u^{(i)}$ は次の表示を持つ．

$$u^{(i)} = \mathrm{LV}(u^{(i)})t^{p^{d_i}} + (t \text{ について低次の } Q^{n-1} \text{ の元 }).$$

それゆえ，

$$U^{(i)} = \mathrm{LV}(u^{(i)}) \cdot (x_1^{p^{d_i}},\dots,x_{n-1}^{p^{d_i}}) + x_n w$$

となる $w \in k[V]$ が存在する．したがって，

$$y_i = \mathrm{LV}(u^{(i)}) \cdot (x_1^{p^{d_i}},\dots,x_{n-1}^{p^{d_i}}).$$

ゆえに，

$$y_i^{p^{d_{n-2}-d_i}} = F^{d_{n-2}-d_i}(\mathrm{LV}(u^{(i)})) \cdot (x_1^{p^{d_{n-2}}},\dots,x_{n-1}^{p^{d_{n-2}}}).$$

$\mathrm{Syz}\,(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$ の基底 $u^{(1)},\dots,u^{(n-2)}$ は独立であることより，k^{n-1} のベクトル

$$F^{d_{n-2}-d_1}(\mathrm{LV}(u^{(1)})),\dots,F^{d_{n-2}-d_{n-2}}(\mathrm{LV}(u^{(n-2)}))$$

は k 上線形独立である．これらのベクトルを延長して k^{n-1} の基底がえられる．この基底は，多項式環 $k[x_1^{p^{d_{n-2}}},\dots,x_{n-1}^{p^{d_{n-2}}}]$ の線形自己同型をあたえる．したがって，$y_1^{p^{d_{n-2}-d_1}},\dots,y_{n-2}^{p^{d_{n-2}-d_{n-2}}}$ は k 上代数的独立である．ゆえに，$y_1,\dots,y_{n-2}$ は k 上代数的独立である．　Q.E.D.

最後に，

$$k[V]^{\mathbb{G}_a} = k[U^{(1)},\dots,U^{(n-2)},x_n]$$

であり，$U^{(1)},\dots,U^{(n-2)},x_n$ は k 上代数的独立であることを示す．

補題 2 (3) と $u^{(i)}$ の定義から，

$$k[V]^{\mathbb{G}_a}\left[\frac{1}{x_n}\right] = k\left[U^{(1)},\dots,U^{(n-2)},x_n,\frac{1}{x_n}\right].$$

ここで，$k[V]$ の部分 k 代数 S を

$$S := k\big[U^{(1)},\dots,U^{(n-2)},x_n\big]$$

とおく．$U^{(1)},\dots,U^{(n-2)}$ はモジュロ x_n で k 上代数的独立であるゆえ，$x_nS = x_nk[V] \cap S$ が成り立つ．したがって，望んでいた等式が成り立ち，$U^{(1)},\dots,U^{(n-2)},x_n$ は k 上代数的独立になる．

References

[1] P. M. Cohn, Free rings and their relations, London Mathematical Society Monographs, No. 2. Academic Press, London-New York, 1971.

[2] A. Fauntleroy, On Weitzenböck's theorem in positive characteristic, Proc. Amer. Math. Soc. **64** (1977), No. 2, 209–213.

[3] A. Fauntleroy, Algebraic and algebrogeometric interpretations of Weitzenböck's problem, J. Algebra **62** (1980), 21–38.

[4] O. Ore, On a special class of polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), 559–584.

[5] R. Tanimoto, An algorithm for computing the kernel of a locally finite iterative higher derivation, J. Pure Appl. Algebra **212** (2008), no. 10, 2284–2297.

[6] O. Zariski, Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, Bull. Sci. Math. (2) **78**, (1954), 155 – 168.