いくつかのpattern avoiding 束におけるNBB基底について

冨江 雅也　　盛岡大学

(e-mail: tomie@morioka-u.ac.jp)

Abstract

本稿は第１６回代数学若手会における講演内容をまとめたものである。

1　概要

集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ における置換 σ を $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ と表記する。置換 $\tau\in S_n$ において $\pi\in S_k$ の pattern を含まないとは τ における勝手な部分列 $\tau(i_1)\tau(i_2)\cdots\tau(i_k)$,（$1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$) 対して大小関係が π とは一致しない時と定める。特に長さが 3 であるような pattern、（$123,132,213,231,312,321$ の 6 通り考えられる）を含まない置換は Catalan 数で数え上げられることが知られている [4]。一方で Barucci, Bernini, Poneti らは複数の pattern avoiding に関する数え上げを行い、特に $123-213-132$-pattern においては Fibonacci 数で数え上げられることを示した [1]。本稿では、本質的に $123-213-132$-pattern と等価である $321-312-231$-avoiding permutations および 321-avoiding permutations に対して weak Bruhat order のもとで束構造を持つことを確かめ具体的に NBB 基底を与えた。さらに Möbius 関数が変形 Fibonacci 多項式の特殊化で与えられることを示した [5]。weak Bruhat order における定義および諸性質に関しては [2] を参照してください。

2　準備

2.1　NBB bases

束 L に対して atom の集合を $A(L)$ で表し全順序 $\lhd$ を入れておく。$\lhd$ に対して BB set および NBB 基底を以下で定めることにする。

定義 2.1. $D\subset A(L)$ が *BB (Bounded Below)* 集合であるとは以下の条件を満たす $a\in A(L)$ が存在するときである

1. $a\le\vee D$
2. すべての $d\in D$ に対して $a\lhd d$

$B\subset A(L)$ が *NBB* 基底 であるとは $\vee=\hat{1}$ かつ、いかなる部分集合 $D\subset B$ に対しても D が *BB* 集合にはならない時をいう。

特に Blass, Sagan の論文 [3] においては $A(L)$ に半順序を入れる場合について考察されている。本稿においては全順序に限って取り扱う。

定理 2.1. *L の Möbius number $\mu(L)$ は以下のようにして計算される*

$$\mu(L) = \sum_{X:\text{NBB base}} (-1)^{|X|} \tag{1}$$

2.2 Modified Fibonacci polynomials

変形フィボナッチ多項式 $\{F'_n(q)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を以下で定める。

1. $F'_1(q) = 1$ $F'_2(q) = 1,$
2. $F'_{k+2}(q) = F'_{k+1}(q) + qF'_k(q)$

一般にフィボナッチ多項式は

1. $F_1(q) = 1$、 $F_2(q) = q$
2. $k \geq 1$ に対して $F'_{k+2}(q) = F'_{k+1}(q) + qF'_k(q)$

によって定義される。本稿では便宜上少し変形した多項式を用いるが、$F_k(q) = q^{k-1}F'_k(q^{-2})$ であることが簡単に確かめられる。

3 The 321-312-231-avoiding permutations

$321-312-231$-avoiding permutation に weak Bruhat order を入れ最大元 $\hat{1}$ を添加したものを $\widehat{S_n}(321-312-231)$ と書く。このとき $\widehat{S_n}(321-312-231)$ は束構造を持ち atom に対して以下の全順序 $\lhd_{\{321,312,231\}}$ を入れることができる。

$$\sigma_1 \lhd_{\{321,312,231\}} \sigma_2 \lhd_{\{321,312,231\}} \cdots \lhd_{\{321,312,231\}} \sigma_{n-1} \tag{2}$$

このとき NBB 基底は以下で特徴づけられる。

命題 3.1. 集合 $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots \sigma_{i_k}$ *(ただし $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ とする)* が $\widehat{S_n}(321-312-231)$ における *NBB* 基底である必要十分条件は

1. $i_1 = 1, i_2 = 2$

2. $2 \leq p \leq k-1$ において $i_p + 2 \leq i_{p+1}$

である。

さらに NBB 基底より Möbius number を計算することができる。特に以下の結果を得る。

定理 3.1. $\mu(\widehat{S_n}(321-312-231)) = F'_{n-2}(-1)$

4 The 321-avoiding permutations

321-avoiding permutation に weak Bruhat order を入れ最大元 $\hat{1}$ を添加したものを $\widehat{S_n}(321)$ と書く。このとき $\widehat{S_n}(321)$ は束構造を持ち atom に対して以下の全順序 $\lhd_{\{321\}}$ を入れることができる。

$$\sigma_1 \lhd_{\{321\}} \sigma_2 \lhd_{\{321\}} \cdots \lhd_{\{321\}} \sigma_{n-1} \tag{3}$$

このとき NBB 基底は以下で特徴づけられる。

命題 4.1. 集合 $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots \sigma_{i_k}$ *(ただし* $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ *とする)* が $\widehat{S_n}(321)$ における *NBB* 基底である必要十分条件は

1. $i_1 = 1, i_2 = 2$
2. $2 \leq p \leq k-1$ において $i_p + 2 \leq i_{p+1}$

である。

さらに NBB 基底より Möbius number を計算することができる。特に以下の結果を得る。

定理 4.1. $\mu(\widehat{S_n}(321) = F'_{n-2}(-1)$

注意 4.1. $\sigma \in \{132, 213, 231, 312\}$ に対して *σ-avoiding permutation* に *weak Bruhat order* を入れることにより最小元 $\hat{0}$ および最大元 $\hat{1}$ をもつ半順序 $\widehat{S}(\sigma)$ を得る。これは *Tamari* 束に同型となる。

REFERENCE

[1] E. Barcucci, A. Bernini, M. Poneti, From Fibonacci to Catalan permutations. Pure. Math. Appl. 17, 1-17 (2006)

[2] A. Björner, F. Brenti, Combinatorics of Coxeter groups, Springer-Verlag, New York, 2005.

[3] A. Blass, B. Sagan, Möbius functions of lattices. Adv. Math. 127, 94-123 (1997).

[4] D. Knuth, The art of computer programming, I: Fundamental algorithms. Addison-Wesley, Publishing Co, Reading, Mass-London-Don Mills, Ont, 1969

[5] M. Tomie, NBB bases of some pattern avoiding lattices, arXiv:0912.4560, submitted