A geometric approach to some finite dimensional algebras

上山 健太*

静岡大学創造科学技術大学院

本稿は第 16 回代数学若手研究会において，上記のタイトルで講演した内容をまとめたものであり，毛利出氏との共同研究 [9] に基づいて構成されたものである．

非可換代数幾何学における最も主要な研究課題のひとつは AS-regular algebra と呼ばれる代数を分類することである．実際，Artin, Tate, Van den Bergh [2] による 3 次元 AS-regular algebra の幾何的分類が，この分野の出発点になっている．我々は [9] において，いつ geometric AS-regular algebra が次数付き加群の圏として同値（次数付き森田同値）かという問いに対して結果を得た．本稿ではこの結果の Frobenius Koszul algebra と Beilinson algebra への応用について紹介する．

1 Preliminaries

以下，k を標数 0 の代数的閉体とし，次数付き代数 A と言えば連結次数付き k 代数とする．つまり，$A=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}A_i$ で $A_0=k$ を満たす．特に，全ての次数 1 の元で生成された有限生成次数付き代数は $A=T(V)/I$ という形で表される．但し，V は k 上有限次元ベクトル空間，$T(V)$ は k 上 V のテンソル代数とし，I は $T(V)$ の斉次両側イデアルとする．さらに，次数付き代数 A が $A=T(V)/(R)$ という形で表されるとき，二次代数であるという．ここで，$R\subset V\otimes_k V$ とし，(R) は R で生成された $T(V)$ の両側イデアルとする．

次数付き代数 A に対して, $\operatorname{GrMod}A$ は次数付き右 A 加群の圏を表す．また, 任意の $M\in\operatorname{GrMod}A$ と各 $m\in\mathbb{Z}$ について，$M(m)\in\operatorname{GrMod}A$ は $M(m)_i=M_{m+i}$ となる次数付き右 A 加群を表す．さらに任意の $M,N\in\operatorname{GrMod}A$ に対し,

$$\underline{\operatorname{Ext}}^i_A(M,N):=\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}\operatorname{Ext}^i_{\operatorname{GrMod}A}(M,N(m))$$

と定義する．

二次代数 $A=T(V)/(R)$ が与えられたとき，A の Koszul dual $A^!:=T(V^*)/(R^\perp)$ が定義できる．但し

$$R^\perp:=\{\lambda\in V^*\otimes_k V^*\mid\lambda(r)=0\text{ for all }r\in R\}.$$

明らかに $A^!$ はまた二次代数であり，次数付き代数として $(A^!)^!\cong A$ となる．

次に，Koszul algebra と次数付き Frobenius algebra の定義を確認する．

* f5144004@ipc.shizuoka.ac.jp

定義 1.1. A を連結次数付き代数とする．$k = A/A_{\geq 1} \in \operatorname{GrMod} A$ の自由分解が

$$\cdots \to \bigoplus_{j=1}^{r_3} A(-l_{3j}) \to \bigoplus_{j=1}^{r_2} A(-l_{2j}) \to \bigoplus_{j=1}^{r_1} A(-l_{1j}) \to \bigoplus_{j=1}^{r_0} A(-l_{0j}) \to k \to 0$$

で与えられているとする．このとき A の complexity を

$$c_A := \inf\{\alpha \mid r_n \leq cn^{\alpha-1} \text{ for some constant } c > 0\}$$

で定義する．また，任意の $i \in \mathbb{N}$ と $1 \leq j \leq r_i$ について $l_{ij} = i$ を満たすとき A を Koszul という．

もし A が Koszul であれば，A は二次代数であり，$A^!$ がまた Koszul になることが知られている．さらにこのとき，A の complexity は $\operatorname{GKdim} A^!$ で計算できる．

定義 1.2. A を次数付き代数とする．A が Gorenstein parameter ℓ の次数付き Frobenius algebra であるとは，ある次数付き代数同型 $\nu \in \underline{\operatorname{Aut}}_k A$ が存在して，次数付き A-A 両側加群として

$$A^* \cong {}_\nu A(-\ell)$$

を満たすことを指す．但し，$(-)^* := \underline{\operatorname{Hom}}_k(-, k)$ とし，${}_\nu A$ は次数付きベクトル空間としての A に新しい作用 $a * x * b := \nu(a)xb$ を定義した A-A 両側加群とする．さらにこのとき，$\nu \in \underline{\operatorname{Aut}}_k A$ のことを A の中山自己同型という．A の中山自己同型 $\nu \in \underline{\operatorname{Aut}}_k A$ が id_A であるとき，次数付き Frobenius algebra A は対称的であるという．

Frobenius algebra は表現論において重要な研究対象である．次に定義する AS-regular algebra は非可換代数幾何学において最も重要な研究対象のひとつである．

定義 1.3. [1] 連結次数付き代数 A が次を満たすとき，Gorenstein parameter ℓ の d 次元 AS-regular algebra であるという．

- $\operatorname{gldim} A = d < \infty$, and
- $\underline{\operatorname{Ext}}^i_A(k, A) \cong \begin{cases} k(\ell) & \text{if } i = d, \\ 0 & \text{if } i \neq d. \end{cases}$

次の結果によって次数付き Frobenius algebra と AS-regular algebra は密接に関係していることが分かる．

定理 1.4. [10, Proposition 5.10] A を連結次数付き代数とする．このとき A が Frobenius Koszul であることと $A^!$ が AS-regular Koszul であることは同値である．

補題 1.5. [9, lemma 4.1] A, A' を二次代数とする．このとき

(1) $A \cong A'$ as graded algebras $\Longleftrightarrow A \cong (A')^!$ as graded algebras.
(2) $\operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} A' \Longleftrightarrow \operatorname{GrMod} A^! \cong \operatorname{GrMod}(A')^!$.

つまり Frobenius Koszul algebra を次数付き森田同値を除いて分類することは AS-regular Koszul algbera を次数付き森田同値を除いて分類することと同じである．

2 Co-geometric Frobenius Koszul algebras

$A = T(V)/(R)$ を二次代数とする．このとき

$$\mathcal{V}(R) := \{(p,q) \in \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \mid f(p,q) = 0,\ \forall f \in R\}$$

と定義する．

定義 2.1. [7] $A = T(V)/(R)$ をネーター二次代数とする．このとき，k 上閉部分スキーム $E \subseteq \mathbb{P}(V^*)$ と E の k 上自己同型 σ からなる幾何の組 (E,σ) が存在して

(G1) $\mathcal{V}(R) = \{(p,\sigma(p)) \in \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \mid p \in E\}$
(G2) $R = \{f \in V \otimes_k V \mid f(p,\sigma(p)) = 0 \text{ for all } p \in E\}$

を満たすとき A は geometric であるという．

二次代数 A が条件 (G1) を満たすとき，A は幾何の組 (E,σ) を決定する．二次代数 A が条件 (G2) を満たすとき，A は幾何の組 (E,σ) によって決定される．A が geometric ならば (G2) を満たすので $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$ と表す．

定義 2.2. 二次代数 A が $A^! \cong \mathcal{A}(E,\sigma)$ を満たすとき，A は co-geometric であるという．またこのとき，$A = \mathcal{A}^!(E,\sigma)$ と表す．

例 2.3. Gorenstein parameter -3 で $c_A < \infty$ の Frobenius Koszul algebra や skew exterior algebra

$$k\langle x_1,\dots,x_n\rangle/(\alpha_{ij}x_ix_j + x_jx_i, x_i^2) \quad (\alpha_{ij}\alpha_{ji} = \alpha_{ii} = 1,\ \forall i,j \in \{1,\dots,n\})$$

は co-geometric である．

$A = \mathcal{A}^!(E,\sigma)$ を Gorenstein parameter $-\ell$ の co-geometric Frobenius Koszul algebra とし，$\nu \in \operatorname{GrMod} A$ を中山自己同型とする．このとき ν は E の自己同型 $\nu : E \xrightarrow{\sim} E$ を導く．この事より，Gorenstein parameter $-\ell$ の co-geometric Frobenius Koszul algebra A から新しい次数付き代数

$$\overline{A} := \mathcal{A}^!(E, \nu\sigma^\ell).$$

が定義できる．

ここで，本稿の主結果を紹介する．

定理 2.4. [9]

(1) A, A' を co-geometric Frobenius Koszul algebra とする．このとき

$$\operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} A' \Longrightarrow \overline{A} \cong \overline{A'} \text{ as graded algebras.}$$

(2) 特に A, A' が Gorenstein parameter -3 で $c_A, c_{A'} < \infty$ の Frobenius Koszul algebra であり、E, E' が $\mathbb{P}^2$ における reduced and reducible cubic で $E \cong E'$ を満たすとき

$$\operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} A' \Longleftrightarrow \overline{A} \cong \overline{A'} \text{ as graded algebras.}$$

一般に，二つの次数付き代数が次数付き森田同値かどうかを調べることは簡単ではない．しかし，次数 1 で生成された二つの次数付き代数が次数付き代数として同型かどうかは比較的簡単に調べられる．この意味で定理 2.4 は役立つ．

例 2.5. 二次代数 A を

$$A = k\langle x,y,z\rangle/(\alpha yz+zy, \beta zx+xz, \gamma xy+yx, x^2, y^2, z^2) \qquad (\alpha\beta\gamma \neq 0,1)$$

で定義する．このとき $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$ は Gorenstein parameter -3 で $c_A < \infty$ の Frobenius Koszul algebra である．ここで $E = l_1 \cup l_2 \cup l_3$，但し，$l_1 = \mathcal{V}(x), l_2 = \mathcal{V}(y), l_3 = \mathcal{V}(z)$ であり（三角形をつくる三本の直線），$\sigma \in \operatorname{Aut}_k E$ は

$$\begin{aligned} \sigma|_{l_1}(0,b,c) &= (0,b,\alpha c) \\ \sigma|_{l_2}(a,0,c) &= (\beta a,0,c) \\ \sigma|_{l_3}(a,b,0) &= (a,\gamma b,0) \end{aligned}$$

で与えられる．このとき，A の中山自己同型から導かれる $\nu \in \operatorname{Aut}_k E$ は

$$\nu^*(a,b,c) = ((\beta/\gamma)a, (\gamma/\alpha)b, (\alpha/\beta)c)\,.$$

で与えられる．これより $\nu\sigma^3 \in \operatorname{Aut}_k E$ は

$$\begin{aligned} \nu\sigma^3|_{l_1}(0,b,c) &= (0,b,\alpha\beta\gamma c) \\ \nu\sigma^3|_{l_2}(a,0,c) &= (\alpha\beta\gamma a,0,c) \\ \nu\sigma^3|_{l_3}(a,b,0) &= (a,\alpha\beta\gamma b,0) \end{aligned}$$

となるので，

$$\overline{A} = \mathcal{A}(E,\nu^*\sigma^3) = k\langle x,y,z\rangle/(\alpha\beta\gamma yz+zy, \alpha\beta\gamma zx+xz, \alpha\beta\gamma xy+yx, x^2, y^2, z^2)$$

となる．

同様に，二次代数 $A' = \mathcal{A}^!(E',\sigma')$ を

$$A' = k\langle x,y,z\rangle/(\alpha' yz+zy, \beta' zx+xz, \gamma' xy+yx, x^2, y^2, z^2) \qquad (\alpha'\beta'\gamma' \neq 0,1)$$

で定義する．すると $\overline{A'}$ は

$$\overline{A'} = k\langle x,y,z\rangle/(\alpha'\beta'\gamma' yz+zy, \alpha'\beta'\gamma' zx+xz, \alpha'\beta'\gamma' xy+yx, x^2, y^2, z^2)$$

となる．定理 2.4 により

$$\operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} A' \iff \overline{A} \cong \overline{A'}$$

と分かる．さらに [12, Lemma 2.3] と補題 1.5 より，$\overline{A} \cong \overline{A'} \Leftrightarrow \alpha'\beta'\gamma' = (\alpha\beta\gamma)^{\pm 1}$ と分かる．従って

$$\operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} A' \iff (\alpha\beta\gamma)^{\pm 1}$$

が得られる．

本題からは少し外れるが，（次数付きでない）森田同値と次数付き森田同値では状況が異なるということを示している結果をひとつ紹介する．（次数付きでない）Frobenius algebra A が A-A 両側加群として $A^* \cong A$ であるとき，A は対称的と呼ばれる．対称的な Frobenius algebra に森田同値な Frobenius algebra は対称的であるという事実はよく知られている．それに対して skew exterior algebra について次の結果が得られた．

定理 2.6. [9] 全ての skew exterior algebra は対称的な skew exterior algebra に次数付き森田同値である．

3 Beilinson algebras of geometric AS-regular algebras

Beilinson algebra は [3] や [6] で導入され，[5] では重要な役割を果たしている．特に，A が d 次元 AS-regular algebra のとき，A の Beilinson algebra ∇A は大域次元 $d-1$ の quasi-Fano algebra とよばれる良い有限次元代数になることが知られている (cf. [4], [5], [6])．

定義 3.1. Gorenstein parameter ℓ の AS-regular algebra A の Beilinson algebra ∇A を次で定義する．

$$\nabla A := \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{\ell-1} \\ 0 & A_0 & \cdots & A_{\ell-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_0 \end{pmatrix}.$$

A を d 次元 coherent AS-regular algebra とする．このとき次の三角圏としての同値

$$\mathcal{D}^b(\operatorname{tails} A) \cong \mathcal{D}^b(\operatorname{mod} \nabla A)$$

が示されている ([5, Theorem 4.14])．もし A が次数 1 の元で生成された多項式環 $k[x_1, \cdots, x_d]$ ならば，この同値は Beilinson の同値を導く．

定理 3.2. [5, Theorem 4.17] A, A' を AS-regular algebra とする．このとき

$$\operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} A' \implies \nabla A \cong \nabla A' \text{ as algebras.}$$

つまり Beilinson algebra を同型を除いて分類することは AS-regular algebra を次数付き森田同値を除いて分類することと同じである．

$A = \mathcal{A}(E, \sigma)$ を Gorenstein parameter ℓ の geometric AS-regular algebra とし，$\nu \in \underline{\operatorname{Aut}}_k A$ を A の一般化された中山自己同型とする（定義は [8] 参照）．このとき ν^* は E の自己同型 $\nu^* : E \xrightarrow{\sim} E$ を導く．この事より，A から新しい次数付き代数

$$\overline{A} := \mathcal{A}(E, \nu^* \sigma^\ell).$$

が定義でき，定理 2.4 同様の定理が成り立つ．

定理 3.3. [9], [11]

(1) A, A' を geometric AS-regular algebra とする．このとき

$$\operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} A' \Longrightarrow \overline{A} \cong \overline{A'} \text{ as graded algebras.}$$

(2) 特に A, A' が $\mathrm{GKdim}\, A, \mathrm{GKdim}\, A' < \infty$ の 3 次元 quadratic AS-regular algebra であり、E, E' が $\mathbb{P}^2$ における reduced and reducible cubic で $E \cong E'$ を満たすとき

$$\mathrm{GrMod}\, A \cong \mathrm{GrMod}\, A' \Longleftrightarrow \overline{A} \cong \overline{A'} \text{ as graded algebras.}$$

以下では，定理 3.2 を用いることで Beilinson algebra の分類に定理 3.3 が利用できることを紹介する．

例 3.4. Beilinson quiver

$$Q = \bullet \overset{\xrightarrow{x_1}}{\underset{\xrightarrow{z_1}}{\xrightarrow{y_1}}} \bullet \overset{\xrightarrow{x_2}}{\underset{\xrightarrow{z_2}}{\xrightarrow{y_2}}} \bullet$$

を固定し，

$$\begin{aligned} I &= (y_1z_2 - \alpha z_1y_2, z_1x_2 - \beta x_1z_2, x_1y_2 - \gamma y_1x_2) & \alpha\beta\gamma &\neq 0, 1 \\ I' &= (y_1z_2 - \alpha' x_1x_2, z_1x_2 - \beta' y_1y_2, x_1y_2 - \gamma' z_1z_2) & \alpha'\beta'\gamma' &\neq 0, 1 \\ I'' &= (y_1z_2 - \alpha'' z_1y_2 - x_1x_2, z_1x_2 - \beta'' x_1z_2, x_1y_2 - \beta'' y_1x_2) & \alpha''(\beta'')^2 &\neq 0, 1 \end{aligned}$$

とする．このとき path algebra with relations $B' = kQ/I, B' = kQ/I', B'' = kQ/I''$ は次の 3 次元 quadratic AS-regular algebra A, A', A'' の Beilinson algebra になっている．

$$\begin{aligned} A &= A(E, \sigma) = k\langle x, y, z\rangle/(yz - \alpha zy, zx - \beta xz, xy - \gamma yx) \\ A' &= A(E', \sigma') = k\langle x, y, z\rangle/(yz - \alpha' x^2, zx - \beta' y^2, xy - \gamma' z^2) \\ A'' &= A(E'', \sigma'') = k\langle x, y, z\rangle/(yz - \alpha'' zy - x^2, zx - \beta'' xz, xy - \beta'' yx). \end{aligned}$$

B, B', B'' が同型かどうかを具体的な同型写像を構成して調べるのは簡単ではない．ところが，幾何を見てみると，$E \cong E' \not\cong E''$ であることより，A'' は A とも A' とも次数付き森田同値にはならないことが分かる．従って，B'' はパラメータの選び方によらず，B とも B' とも代数として同型にはならないという結論を得る．さらに，

$$\begin{aligned} \overline{A} &= k\langle x, y, z\rangle/(yz - \alpha\beta\gamma zy, zx - \alpha\beta\gamma xz, xy - \alpha\beta\gamma yx) \\ \overline{A'} &= k\langle x, y, z\rangle/(\alpha'\beta'\gamma' yz - zy, \alpha'\beta'\gamma' zx - xz, \alpha'\beta'\gamma' xy - yx). \end{aligned}$$

と計算でき，いつ $\overline{A}$ と $\overline{A'}$ が次数付き代数として同型になるかは [12, Lemma 2.3] により確認できる．これより定理 3.2 と定理 3.3 を組み合わせて，次の同値を得る．

(1) $B \cong B'$ as algebras
(2) $\mathrm{GrMod}\, A \cong \mathrm{GrMod}\, A'$
(3) $\overline{A} \cong \overline{A'}$ as graded algebras
(4) $\alpha'\beta'\gamma' = (\alpha\beta\gamma)^{\pm 1}$

参考文献

[1] M. Artin and W. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, *Adv. Math.* **66** (1987), 171-216.

[2] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves, *The Grothendieck Festschrift* Vol. **1** Birkhauser, (1990), 33-85.

[3] Xiao-Wu Chen, Graded self-injective algebras "are" trivial extensions, *J. Algebra* **322** (2009), 2601-2606.

[4] H. Minamoto, Ampleness of two-sided tilting complexes, *Int. Math. Res. Not.*, to appear.

[5] H. Minamoto and I. Mori, The structure of AS-Gorenstein algebras, *Adv. Math.* **226** (2011), 4061-4095.

[6] I. Mori, B-constrcution and C-construction, preprint.

[7] I. Mori, Noncommutative projective schemes and point schemes, *Algebras, rings, and their representations*, World Sci. Publ. (2006), 215-239.

[8] I. Mori, Co-point modules over Frobenius Koszul algebras, *Comm. Algebra* **36** (2008), 4659-4677.

[9] I. Mori and K. Ueyama, Graded Morita equivalences for geometric AS-regular algebras, preprint.

[10] S. P. Smith, Some finite dimensional algebras related to elliptic curves, in *Representation Theory of Algebras and Related Topics* (Mexico City, 1994), CMS Conf. Proc. **19**, Amer. Math. Soc., Providence, (1996), 315-348.

[11] K. Ueyama, Graded Morita equivalences for generic Artin-Schelter regular algebras, *Kyoto J. Math.* **51** (2011), 485-501.

[12] J. Vitoria, Equivalences for noncommutative projective spaces, preprint.