不変式論入門

大渓 正浩

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

m.b.ohtani@gmail.com

Abstract

本講演は不変式論に関するサーベイである. 不変式論には様々な問題意識やアプローチがあるが, 本講演では代数群の作用による不変式環の環論的性質の研究について, 特に可換環論と相互に影響を及ぼしあい発展してきた歴史を踏まえつつその成果を概観する.

1. Introduction -群スキームの作用と Hopf 代数-

本報告を通して k を代数閉体とし, 全てのスキームを k 上で考える.

本報告の元となった講演は, アファイン代数群の有理作用に関する不変式環の環論的性質についてのサーベイである. したがって本報告も同様の性質を持つ.

まずアファイン代数群と Hopf 代数, さらに代数群の有理作用の定義を復習しておこう.

定義 1.1. 被約, 有限型の k 代数 A の素スペクトル $X = \mathrm{Spec}\ A$ をアファイン多様体と言う. このとき $A = k[X]$ と表し, これを X の座標環と言う.

定義 1.2 (アファイン代数群)**.** アファイン多様体 G に多様体の射

$$m : G \times G \to G, \quad e : \mathrm{Spec}\ k \to G, \quad i : G \to G$$

が定義されて, 以下の図式

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times m"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}, \quad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "e\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times e"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}, \quad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "e\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times e"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}$$

がすべて可換となるとき, G をアファイン代数群と言う.

アファイン代数群 G の閉部分多様体 H が m, e と i の制限によってまたアファイン代数群の構造を持つとき, H を G の閉部分群という.

以下, すべての代数群はアファインとし, 特にアファインであることを断らない. 代数群は, その座標環の持つ Hopf 代数の構造によって統制される.

代数群 G が与えられたとき, k 代数の射

$$\Delta : k[G] \to k[G] \otimes k[G],$$
$$\epsilon : k[G] \to k, \quad \sigma : k[G] \to k[G]$$

が与えられて, 対応する可換図式

$$\begin{tikzcd}
k[G] \otimes k[G] \otimes k[G] & k[G] \otimes k[G] \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \Delta"'] \\
k[G] \otimes k[G] \arrow[u, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] & k[G] \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd} \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd}
k[G] & k[G] \otimes k[G] \arrow[l, "\epsilon \otimes \mathrm{id}"'] \\
k[G] \otimes k[G] \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \epsilon"] & k[G] \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd} \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
k[G] & k[G] \otimes k[G] \arrow[l, "\sigma \otimes \mathrm{id}"'] \\
k[G] \otimes k[G] \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \sigma"'] & k[G] \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, "\epsilon"']
\end{tikzcd} \tag{3}$$

が可換となる.

注意 1.3. k 代数 A が上の図式 (1) から (3) を満たすような Δ と ϵ, σ を持つとき, Hopf 代数という.

いくつか簡単な例を挙げておく.

例 1.4 (加法群 G_a)**.** $\mathbb{G}_a := \mathrm{Spec}\ k[T]$ は代数群である. 実際, $k[T]$ には

$$\Delta(T) := T \otimes 1 + 1 \otimes T,$$
$$\epsilon(T) := 0,$$
$$\sigma(T) := -T$$

として Hopf 代数の構造が定まる. これを 1 次元の加法群という.

例 1.5 (乗法群 G_m)**.** $G_m := \mathrm{Spec}\ k[T^{\pm 1}]$ は代数群である. 実際, $k[T^{\pm 1}]$ には

$$\Delta(T) := T \otimes T,$$
$$\epsilon(T) := 1,$$
$$\sigma(T) := T^{-1}$$

として Hopf 代数の構造が定まる. これを 1 次元の乗法群という.

乗法群 G_m の n 個の直積 $T_n := \mathrm{Spec}\ k[T_1^{\pm 1}, ..., T_n^{\pm 1}]$ を n 次元代数トーラスという.

例 1.6 (一般線型群 GL_n)**.** $GL_n := \mathrm{Spec}\ \ k[T_{i,j}]_{\det}$, ここで $\det := \det(T_{i,j})$, は代数群である. 実際,

$$\Delta(T_{i,j}) := \sum_{\ell=1}^{n} T_{i,\ell} \otimes T_{\ell,j},$$
$$\epsilon(T_{i,j}) := \delta_{i,j},$$

(σ は記述を省く) と定めると Hopf 代数の構造が定まる. これを n 次の一般線型群という.

注意 1.7. 一般にすべてのアファイン代数群は, ある GL_n の閉部分群となる ([1], 1.10 Proposition). このことから, アファイン代数群は線形代数群とも呼ばれる.

例 1.8 (p 次巡回群 μ_p)**.** $A := k[T]/(T^p - 1)$ に対して

$$\Delta(T) := T \otimes T,$$
$$\epsilon(T) := 1,$$
$$\sigma(T) := T^{-1} = T^{p-1}$$

とすると Hopf 代数となる. この素スペクトル $\mu_p := \mathrm{Spec}\ \ A$ を p 次巡回群という.

ところで, k の標数が p のとき, μ_p は点 (極大イデアル) をただひとつしか持たない. したがって, 幾何的に点を集めただけでは情報が欠けてしまい, 理論がうまく進まない. 座標環の方には情報がきちんと残っており, 有理作用の定義においてもそれを頼りに話を進めるのが妥当だろうと思う.

とはいえ, 点の全体がなす群という直観的イメージが大切なのは言うまでもない. 例えば次の式を知っておくだけで, 理解がぐっと早まると思う.

注意 1.9. $\Delta(f) = \sum_{(f)} f_{(1)} \otimes f_{(2)}$ が成り立つとき, 2 点 $g, h \in G$ に対して

$$f(gh) = \sum_{(f)} f_{(1)}(g) \cdot f_{(2)}(h)$$

が成り立つ.

座標環 $k[G]$ に定まる Hopf 代数の構造を用いて, G 加群を定義する.

定義 1.10. G を代数群, V を k ベクトル空間とする. k 線形写像 $\Delta_V : V \to V \otimes k[G]$ が存在して以下の可換図式を満たすとき, V を (右) $k[G]$ 余加群, または (左) G 加群という :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Delta_V"] \arrow[d, "\Delta_V"'] & V \otimes k[G] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta_G"] \\ V \otimes k[G] \arrow[r, "\Delta_V\otimes\mathrm{id}"'] & V \otimes k[G] \otimes k[G] \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\Delta_V"'] & & V \\ & V \otimes k[G] \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\epsilon"'] & \end{tikzcd}$$

特に k 代数 S が G 加群の構造を持つとき, G 代数と呼ぶ.

注意 1.11. $k[G]$ 余加群と G の作用. G を代数群とする. k ベクトル空間 V に $k[G]$ 余加群の構造 Δ_V が与えられたとき, 点 $g \in G$ の $v \in V$ への作用を

$$g \cdot v := \sum_{(v)} v_{(2)}(g) \cdot v_{(1)},$$

ここで $\Delta_V(v) = \sum_{(v)} v_{(1)} \otimes v_{(2)}$, と定義できる. この作用によって, (右) $k[G]$ 余加群に (左) G 加群の構造が定義される.

この観察に従えば, 次の定義の妥当性が理解されると思う.

定義 1.12. V を G 加群とする.
(1) k 部分空間 $W \subset V$ が $\Delta_V(W) \subset W \otimes k[G]$ なるとき, G 部分加群という.
(2) $v \in V$ が $\Delta_V(v) = v \otimes 1$ なるとき, v を G 不変元という. V における G 不変元の全体をしばしば V^G と表す (これはもちろん G 部分加群となる).

次の例は重要である.

例 1.13. $G = G_m = \mathrm{Spec}\ k[T^{\pm 1}]$ とする. G 加群 V は次の直和分解を持つ：

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n, \quad V_n := \{v \in V \mid \Delta_V(v) = v \otimes T^n\}.$$

ここで各 V_n は V の G 部分加群である (直観的には, 点 $t \in G_m$ が t^n 倍として作用する固有ベクトルの全体と言える). 特に, $V^G = V_0$ である.

逆に $\mathbb{Z}$ 次数付き k ベクトル空間 $W = \bigoplus W_n$ が与えられたとき, $w \in W_n$ に対して $\Delta_W(w) := w \otimes T^n$ と定義することで G 加群にできる. すなわち, G_m 加群とは $\mathbb{Z}$ 型の次数付き加群に他ならない.

注意 1.14. Hopf 代数を使うことで理論の一般化が容易になることは既に注意した. しかしながら, G が代数群という本講演の設定の元では, 有限次元 k ベクトル空間 V が G 加群とは, 多様体の射 $a_V : G \times V \to V$ が存在してしかるべき (結合則, 単位元の作用に対応する) 可換図式を満たすことと等価である.

この報告で扱う不変式の最初の例は対称式である.

例 1.15. n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ は変数の置換によって n 変数多項式環 $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ に作用する：

$$\sigma \cdot x_i := x_{\sigma(i)}.$$

この作用による不変式を対称式という. 任意の対称式は, 基本対称式

$$e_m := \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_m} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}$$

の多項式として一意的に表される. すなわち, 不変式環は基本対称式全体で生成され, 生成元の間の代数関係式は存在しない.

例 1.16. $k = \mathbb{C}$ とする．3 次巡回群 $G = \left\langle \sigma := \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$, ここで ω は 1 の原始 3 乗根, の 2 変数多項式環 $S = k[x, y]$ への作用を

$$\begin{pmatrix} \sigma \cdot x \\ \sigma \cdot y \end{pmatrix} := \sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega x \\ \omega^{-1} y \end{pmatrix}$$

で定義する．この作用に関する不変式環は $S^G = k[x^3, xy, y^3] \simeq k[X, Y, Z]/(XZ - Y^3)$ である．

これらの例では, いずれも (1) 不変式環の生成系と (2) 生成元の間の代数関係式がすべて特定されている．他の数多の作用に関しても, これらを求めたいと思うのは自然な, かつ重要な問題であった．

問題 1.17 (基本問題)**.** k 上有限型な G 代数 S に対して,
(1) 不変式環 S^G はまた k 上有限型か？
(2) S^G が有限型のとき, 生成系の間の代数関係式は (本質的に) 高々有限個か？

Hilbert 以前には「ひたすら計算する」以外の手法はほとんど存在しなかったと思われる．Hilbert は Noeter 環の概念を用いることで, たいへん多くの群の作用に関して基本問題の (1), (2) を肯定的に解決して見せた．

とはいえ, 18 世紀にも素晴らしい成果が挙げられている．例えば次の定理は具体例の計算などにおいて強力な道具となりうる．

定理 1.18 (Molien)**.** *k を標数 0 の体, V を有限次元 k ベクトル空間, $G \subset GL(V)$ を有限部分群, $S = \operatorname{Sym} V$ とする．このとき S^G の Hilbert 級数 $H_{S^G}(t) := \sum_{n \geq 0} t^n \cdot \dim S_n^G$ は次で与えられる：*

$$H_{S^G}(t) = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - gt)}.$$

2. Hilbert の神学

Hilbert は Noether 環の概念を導入し, これを用いて基本問題を解決する手がかりを与えた．

定義 2.1. 可換環 R は, 以下の同値な条件のいずれか (したがって, すべて) を満たすとき Noether 環という：
(1) 任意の R のイデアルの増大列 $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$ は停留する, すなわちある n が存在して, $I_n = I_{n+1} = \cdots$ が成り立つ,
(2) 任意の空でない R のイデアルの族は極大元を持つ,
(3) 任意の R イデアルは有限生成である．

この (1), (2) と (3) の同値性が重要で, ここから各種の有限性が導かれる．

定理 2.2 (Hilbert の基底定理)**.** *Noether 環 R 上の一変数多項式環 $R[X]$ はまた Noether 環である．*

命題 2.3. (1) *Noether* 環の全射像, 局所化, イデアル進位相による完備化はまた *Noether* 環である.
(2) 体は *Noether* 環である.
したがって, 体上有限型な代数はすべて *Noether* 環で, 生成系の間の関係式 (多項式環からの自然な全射の核) は本質的に有限個である.

ところで, Noether 的な k 代数が有限生成とは限らない (例えば局所化, 完備化など). しかしながら, 次数付き環の場合には両者は等価となる. すなわち次が正しい :

命題 2.4. $\mathbb{N}$ 型次数付き環 $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$, $R_0 = k$, に対し以下は同値である *:*
(1) R は k 上有限生成である,
(2) R は *Noether* 環である.

実際, $R_+ = \bigoplus_{n>0} R_n$ のイデアルとしての斉次元からなる生成系は, k 代数として R の生成することがわかる.

$A = \bigoplus A_n$, $A_0 = k$ を $\mathbb{N}$ 型次数付き環とし, G の作用が次数を保つ (i.e., 各斉次成分が G 部分加群となる) とすると, 直和分解 $A^G = \bigoplus A_n^G$ を次数付けとして A^G は次数付き環となる. 例えば, 有限次元 G 加群 V の対称代数 $\mathrm{Sym}\, V$ にはこの議論が適用できる.

したがって, ある程度まで問題は「不変式環はいつ Noether 環になるか」という問題に帰着されたことになる. この問題のため, 次の概念を導入する.

定義 2.5. G 加群 V に対して, 不変部分加群 V^G からの自然な埋入写像 $V^G \hookrightarrow V$ の $\mathrm{Mod}\, G$ における splitting を Reynolds 作用素という.

例 2.6. G が有限群で位数 $\sharp G$ が $\mathrm{char}\, k$ を割り切らないとき, G 加群 V の Reynolds 作用素 ρ_V は

$$\rho_V(v) = \frac{1}{\sharp G}\sum_{g\in G} g\cdot v$$

で与えられる.

G 代数の Reynolds 作用素は次の性質を満たす :

補題 2.7. G 代数 A が *Reynolds* 作用素 ρ を持つとする.
(1) $a \in A^G$ に対して $\rho(a) = a$ が成り立つ.
(2) $\rho : A \to A^G$ は A^G 線形写像である, すなわち $a \in A^G$, $x \in A$ に対して $\rho(ax) = a\rho(x)$ が成り立つ.

Reynolds 作用素を用いて, 不変式環のイデアルの有限生成性をもとの環の性質から導くことができる. G 代数 A が Reynolds 作用素 ρ を持つとし, I を A^G のイデアルとすると,

$$\rho(IA) = I$$

が成り立つ. 特に A のイデアル IA の生成系 $S \subset I$ は A^G のイデアル I を生成し, したがって $IA \cap A^G = I$ となる. この帰結として次が得られる.

定理 2.8 (Hilbert)**.** V は有限次元 G 加群で, $S = \mathrm{Sym}\, V$ が *Reynolds* 作用素を持つとする. このとき S^G は k 上有限生成である.

Hilbert はこの定理を示し, 様々な群の作用に関して Reynolds 作用素の構成法を具体的に与えた. 結果として, 生成系を与えることなく生成系が有限であること, 生成系の間の関係式が本質的に有限個であることを証明した.

3. 永田雅宜の反例

Hilbert は 1900 年パリで行われた国際数学者会議の総合講演『数学の問題』において, 次の問題を提出した.

問題 3.1 (Hilbert の第 14 問題)**.** 体 k 上の多項式環 $S = k[x_1, \dots, x_n]$ を考える. 任意の中間体 $k \subset L \subset Q(S)$, ここで $Q(S) = k(x_1, \dots, x_n)$ は S の商体, に対して $L \subset S$ は k 上有限生成となるか？

群 G が S に作用するとし, $L = Q(S^G)$ を不変式環 S^G の商体とすると $L \cap S = S^G$ なので, 問題は不変式環の有限生成性をその一部として含む.

Zariski はまず肯定的な結果として, $n \leq 2$ で正しいことを証明した.

命題 3.2 (Zariski [37])**.** *k は体, B は k 上有限生成な整閉整域とする. 体拡大 $k \subset Q(B)$ の中間体 F が $\operatorname{trans.deg}_k F \leq 2$ を満たせば, $F \cap B$ は k 上有限生成である.*

以下, この問題をめぐる永田雅宜の素晴らしい足跡を簡単になぞってみたい. $k = \mathbb{C}$ とする.

$2n$ 次元アファイン空間 $V = \mathbb{C}^{2n}$ の基底を $\{p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_n, q_n\}$ とする. n 次元加法群 G_a^n の V への作用を

$$(t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot p_i = p_i + t_i q_i$$
$$(t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot q_i = q_i$$

とする. ここから定まる G_a^n の $S = \operatorname{Sym} V$ への作用は永田型作用と呼ばれている.

定理 3.3 (永田雅宜 [23])**.** *$n = 16$ とする. G_a^{16} の十分一般な余次元 3 (したがって次元 13) の部分群 G の作用による不変式環 S^G は k 上有限生成でない.*

これは Hilbert が 1900 年に提出した 23 個の問題に対する最初の否定的解答であった (肯定的に解決された問題はいくつかある). この例は最初にも関わらず, 代数群の線形作用というきれいな作用で与えられていることが素晴らしい.

永田型作用についてはその後詳しく調べられ, 次の例が与えられている.

定理 3.4 (向井茂 [22])**.** *$k = \mathbb{C}$ とする. $G = G_a^3$ の 18 変数多項式環 S への線形作用が存在して, S^G は k 上有限生成ではない.*

一方 1 次元加法群の線形作用には次の結果が知られている.

定理 3.5 (Weitzenböck の定理)**.** *$\operatorname{char} k = 0$ とする. 多項式環への G_a の線形作用による不変式環は有限生成である.*

したがって, G_a^2 の線形作用による不変式環が気になるが, これは未解決である (例えば永田型の場合など, 部分的な結果はある). また正標数の場合に Weitzenböck の定理が成り立つかも分かっていない.

Hilbert の第 14 問題に対する次のエポックは, 1990 年 Roberts によって与えられた. これによって Hilbert の第 14 問題の研究が活発化し, 現在では不変式環の有限生成性はかなり明らかになったと言えると思う.

以下しばらく $\operatorname{char} k = 0$ とする.

定義 3.6. R を k 代数とする. k 線形写像 $D : R \to R$ で

$$D(a+b) = D(a) + D(b), \quad D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

を満たすものを導分と言う. さらに $D(k) = 0$ のとき k 導分と言う.

多項式環 S の k 導分 D に対して, $S^D = \{f \in S \mid D(f) = 0\}$ は S の k 部分代数をなし, これを D の定数環と言う. Hilbert の第 14 問題で $L = Q(S^D)$ とすれば,「S の k 導分 D に対して定数環 S^D は k 上有限生成か？」という問題に帰着される.

肯定的な結果としては次がある.

定理 3.7 (Nowicki–永田雅宜 [26])**.** *$\operatorname{char} k = 0$, $n \leq 3$ とする. n 変数多項式環 S の k 導分 D に対して定数環 S^D は k 上有限生成である.*

さらに, 導分に少し条件を課すと, 導分の定数環をある群による不変式環と見做すこともできる.

定義 3.8. 多項式環 $S = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の k 導分 D が局所冪零とは, 任意の $f \in S$ に対して十分大きな s をとれば $D^s(f) = 0$ となることをいう.

多項式環 $S = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の局所冪零導分を与えることは, G_a の作用を与えることと等価である. 実際, S の局所冪零導分 D に対して余作用 $S \to S \otimes k[G_a] = S \otimes k[T]$ を

$$f \mapsto \sum_{j \geq 0} \frac{D^j(f)}{j!} \otimes T^j$$

と定めることができる. 逆に G_a の作用が余作用 $f \mapsto \sum_{j \geq 0} f_j \otimes T^j$ で定義されているときに

$$D(f) = f_1$$

とすれば, これは S の k 導分を与える.

命題 3.9. *上の設定において, $S^{G_a} = S^D$.*

したがって, 局所冪零導分で定数環が有限生成にならないものを与えることが, 同時に不変式環が有限生成にならない群の作用の例を与えることと等価になる.

定義 3.10. 多項式環 $S = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の k 導分 D が三角とは, 各 i に対して $D(x_i) \in k[x_1, \ldots, x_{i-1}]$ を満たすことをいう.

定義から明らかに三角導分は局所冪零である. Roberts は三角導分で定数環が有限生成とならないものを初めて構成した.

定理 3.11 (Roberts [29])**.** *7 変数多項式環 $S = k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z]$ の k 導分を*

$$D := x_1^{t+1} \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2^{t+1} \cdot \frac{\partial}{\partial y_2} + x_3^{t+1} \cdot \frac{\partial}{\partial y_3} + (x_1 x_2 x_3)^t \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

と定めると, 定数環 S^D は有限生成でない.

Roberts の例に触発されて変数の個数を減らす努力が続けられ, Deigle–Freudenburg により 5 変数多項式環の三角導分で定数環が有限生成とならない例が与えられている [3].

定理 3.7 とこの例によって, 局所冪零導分に関する定数環に関する Hilbert の第 14 問題は 4 変数の場合が残された格好である. 三角の場合 (Daigle–Freudenburg [4]), 局所冪零で各 $D(x_i)$ が単項式となる場合 (黒田茂 [18]) など, 有限生成となる部分的結果が知られている. 一般の局所冪零導分については未解決である. また黒田により, 4 変数多項式環の局所冪零ではない k 導分 D で, 定数環 S^D が有限生成とならない例が与えられている [20].

さらに黒田は, 3 変数多項式環の Hilbert の第 14 問題に反例を与え ([19]), Hilbert の第 14 問題は $n \leq 2$ で正しく, $n \geq 3$ で反例あり, と決着がついた.

不変式環の有限生成性に関する Mumford 予想 (肯定的成果) についても, 永田雅宜は目覚ましい成果を挙げている.

定義 3.12 (簡約群・半単純群)**.** アファイン代数群が簡約 (resp. 半単純) とは, 連結で, かつ連結な正規可解部分群のうち極大なものが代数トーラス (resp. 自明) となることをいう.

例 3.13. (1) 一般線型群 GL_n (特に乗法群 $G_m = GL_1$), 特殊線型群 SL_n, 射影線型群 PSL_n, 斜交群 SP_{2n}, 特殊直交群 SO_n はすべて簡約で, 一般線型群以外は半単純である.
(2) 簡約群 (半単純群) 同士の直積はまた簡約群 (半単純群) である. 特に代数トーラスは簡約群である.
(3) 加法群 G_a は簡約群でない.

定義 3.14 (幾何学的に簡約な群)**.** 代数群 G が幾何学的に簡約とは, 任意の有限次元 G 加群 V と任意の $v \in V^G \setminus \{0\}$ に対して, 次数 $r > 0$ の斉次不変式 $f \in k[V]^G$ が存在して $f(v) \neq 0$ を満たすことを言う.

この定義において, 任意の V, v に対して f が一次式に, すなわち $f \in (V^*)^G$ に取れるとき, G は線型簡約という.

定理 3.15 (線型簡約群の特徴づけ)**.** *代数群 G に対して以下は同値である :*
(1) G は線型簡約である,
(2) 任意の G 加群は単純 G 加群の直和に分解される,
(3) 不変部分を取る関手 $[-]^G : \mathrm{Mod}\, G \to \mathrm{Mod}\, G$ は完全である,
(4) 任意の G 加群は Reynolds 作用素を持つ.

定理 3.16 (Hilbert の定理の帰結)**.** *G が線型簡約群のとき, 任意の k 上有限生成な G 代数 A に対して A^G は k 上有限生成である.*

定義から明らかに線型簡約群は幾何学的に簡約である. 次はこの Hilbert の定理を本質的に拡張する素晴らしい定理である.

定理 3.17 (Hoboush–永田–Popov)**.** *代数群 G に関し以下は同値である:*
(1) *G の単位元を含む連結成分 G° は簡約である,*
(2) *G は幾何学的に簡約である,*
(3) *任意の k 上有限生成な G 代数 S に対して S^G は k 上有限生成である.*

(1)⇒(2) は Mumford が予想した (Mumford 予想). (2)⇒(3) は永田雅宜が証明し ([25]), これによって Mumford 予想の重要性が増した. Mumford 予想は Haboush によって証明され ([5]), 最後に Popov が, 永田による Hilbert の第 14 問題の反例を利用して (3)⇒(1) を示した ([27]).

さらに永田は, 線型簡約群と (幾何学的) 簡約群の差異も示し, この定理の重要性を明らかにしている.

定理 3.18. (1) *$\mathrm{char}\, k = 0$ のとき, 任意の幾何学的に簡約な群は線型簡約である (Weyl).*
(2) *$\mathrm{char}\, k = p > 0$ のとき, 線型簡約群は代数トーラスの, 位数が p で割り切れない有限群による拡大に限られる. 特に連結な線型簡約群は代数トーラスしか存在しない. (永田 [24])*

以下, 少し有限群の場合について触れる. この場合, 有限という特徴から議論を簡単にできることがある. 鍵となるのは次の性質である.

定義 3.19. $B \subset A$ を環の拡大とする. A が B 上整とは, 任意の A の元が B 係数のモニック多項式 (i.e., 最高次の係数が 1 の多項式) の根となることをいう.

補題 3.20. *有限群 G が環 A に作用するとき, A は不変式環 A^G 上整である.*

このことは, 任意の $a \in A$ が A^G 係数のモニック多項式 $\prod_{g \in G}(t - g \cdot a)$ の根となることから従う.

補題 3.21. 環拡大 $B \subset A$ に対して, 以下は同値である *:*
(1) *A は B 加群として有限生成である,*
(2) *A は B 上整, かつ B 代数として有限生成である.*

このことから, 有限群 G が有限生成 k 代数 A に k 同型の群として作用するとき, A は不変式環 A^G 加群として有限生成となることが判る. この場合には次のように, もとの環の性質が部分環に伝わることがあり, その帰結として不変式環の良い性質が得られる.

定理 3.22. (1)(Artin–Tate の補題) 環拡大 $R \subset B \subset A$ は*, A が R 代数として有限生成, かつ A が B 加群として有限生成ならば, B は R 代数として有限生成である.*
(2)(Eakin–永田の定理) 環拡大 $B \subset A$ に対して*, A が B 加群として有限生成, かつ A が Noether 環ならば B も Noether 環である.*

命題 3.23. 有限群 G が k 代数 A に, k 同型として作用するとき,
(1) A が k 上有限生成ならば, A^G も k 上有限生成である.
(2) A が *Noether* 環ならば A^G も *Noether* 環である.

ただし, 上の命題において「k 同型として作用する」という条件を外すと, 環拡大 $A^G \subset A$ の有限性も保証できなくなり, 不変式環が Noether 環とならないような例も構成できる. 次の反例は本質的に永田雅宜による.

例 3.24. p を素数, $K = \mathbb{F}_p(x_1, x_2, \ldots)$ を有理関数体とする. K の導分 D を

$$D := \sum_{m \geq 1} x_{m+1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_m}$$

で定めると $K^D = \mathbb{F}_p(x_1^p, x_2^p, \ldots)$ で, このとき $[K : K^D] = \infty$ となる.

p 次巡回群 $G = \langle \sigma \rangle$ の $A := K[t]/(t^2)$ への作用を

$$\sigma \cdot (a + tb) := a + (b + D(a))t, \qquad a, b \in K$$

で定めると $A^G = K^D + Kt$ であり, これは Noether 環でない.

4. Hochster の洞察

19070 年代に入ってホモロジー代数が可換環論に導入され, Noether 環が細かく分類され研究されるに至った. その進展と歩調を合わせるようにして, 不変式論も「いつそれらの各性質が成り立つか」という問題に広がっていくようになった.

以下, 簡約群の体上有限生成な代数への作用による不変式環 (Haboush–永田–Popov の定理によって, これらの不変式環はまた体上有限生成, 特に Noether 環になる) の性質に関する議論を, Cohen–Macaulay 性を中心として追っていきたい.

その前に, まず Cohen–Macaulay 性を定義しておく.

定義 4.1. $(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環, M を A 加群とする.
(1) $x_1, \ldots, x_l \in \mathfrak{m}$ が M 正則列とは, x_i が $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$ 非零因子, かつ $M/(x1, \ldots, x_l)M \neq 0$ を満たすことを言う.
(2) M 正則列の最大の長さを $\operatorname{depth}_A M$ で表し, M の深度という.

深度は局所コホモロジーを用いて測ることもできる.

命題 4.2. $(A, \mathfrak{m})$ を *Noether* 局所環, $M \neq 0$ を有限生成 A 加群とするとき,

$$\begin{aligned} \operatorname{depth}_A M &= \min\{r \mid \operatorname{Ext}^r_A(A/\mathfrak{m}, M) \neq 0\} \\ &= \min\{r \mid H^r_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0\}. \end{aligned}$$

また, 一般に A 正則列はパラメーター系 (その長さは Krull 次元 $\dim A$ に一致する) の一部を為し, したがって

$$\operatorname{depth} A \leq \dim A$$

が成り立つ.

定義 4.3. Noether 局所環 A が $\operatorname{depth} A = \dim A$ を満たすとき, Cohen–Macaulay という. 一般の Noether 環 A は, その任意の局所化が Cohen–Macaulay となるとき Cohen–Macaulay という.

次は不変式環の Cohen–Macaulay 性に関する最初の定理と思われる.

定理 4.4 (Hochster–Eagon [12])**.** *有限群 G が Cohen–Macaulay 環 A に作用し, Reynolds 作用素が存在すれば不変式環 A^G も Cohen–Macaulay である.*

上の定理において, 群の有限性の仮定は外せない.

定理 4.5 (arithmetic Cohen–Macaulayfication [17])**.** *任意の体上有限型の整域 A は, ある Cohen–Macaulay かつ有限型の整域 S の, G_m の作用による不変式環として実現される.*

詳しくは, A のあるイデアル I による Rees 代数

$$\mathcal{R}(I) := A[It] = R \oplus It \oplus I^2t^2 \oplus \cdots \subset R[t]$$

が Cohen–Macaulay 環となることが示されている. $\mathbb{Z}$ 型の次数付き環とは G_m 代数に他ならず, 不変式環はその 0 次成分であることを合わせると上の事実に至る. さらに注意しておくと, G_m は線形簡約なので常に Reynolds 作用素も存在する.

次の定理は, 不変式環のホモロジー代数的性質の研究を方向づけたというべき大定理である.

定理 4.6 (Hochster–Roberts [14])**.** *G が線型簡約群, A が正則な G 代数ならば不変式環 A^G は Cohen–Macaulay である.*

この定理の不思議な点は, 不変式環の次元や深度についてはほとんど分からないにも関わらず Cohen–Macaulay 性だけは示せているという点である.

以下現在の視点からこの定理の証明をなぞってみたい. Hochster の洞察によって与えられたもののひとつが, 純部分環の概念の重要性である.

定義 4.7. 可換環の射 $f : B \to A$ が純とは, 任意の B 加群 M に対して $\mathrm{id}_M \otimes f : M \to M \otimes_B A$ が単射となることをいう.

このとき特に f 自身単射であり ($M = B$ とせよ), B は A の部分環と見做せる. この意味で「B は A の純部分環である」とも言う.

補題 4.8. *可換環の射 $B \to A$ が $\operatorname{Mod} B$ の分裂単射ならば B は A の純部分環である. 特に G 代数 A が Reynolds 作用素を持てば, 不変式環 A^G は A の純部分環である.*

一般に, **良い性質を持つ環の純部分環はよい性質を持つ** ことが期待され, その基本的な考え方に則った研究成果が数多与えられている. [1] この概念が導入されたことで, 純粋に環論的な手法によって (群の作用にあまり触れずに) 不変式環の環論的性質を一般的に導くことができるようになった.

[1]今回は時間軸を中心に据えたためにここで純部分環の概念を登場させることになったのだが, 正直なところ, 純部分環を軸として理論を展開した方が透明だったかもしれない. 橋本光靖氏の概説 [9] はその立場で書かれている.

命題 4.9. *B を環 A の純部分環, I を B のイデアルとする. このとき $M = B/I$ とすれば $B/I \to A \otimes (B/I) = A/IA$ は単射であり, $IA \cap B = I$ が成り立つ.*

特に, Noether 環の純部分環は Noether 環である.

例えば次は Hilbert の定理の一般化となっている.

定理 4.10 (橋本 [7])**.** *R が Noether 環, S が有限生成 R 代数, A が S の R 部分代数で S の純部分環ならば, A は R 代数として有限生成である.*

Hochster–Roberts の定理は次の形に一般化される.

定理 4.11. *k を体, A を正則な k 代数, B を A の純部分環とする. このとき B は Cohen–Macaulay である.*

この定理の証明を, 標数によって分けて論じる. 標数 0 の場合には次の概念が有用である.

定義 4.12 (有理特異点)**.** *X を標数 0 の体上本質的に有限型の正規スキームとする. X のある特異点解消 $\pi : \tilde{X} \to X$ で $R^i\pi_*\mathcal{O}_X = 0$ $(i > 0)$ なるものが存在するとき, X は高々有理特異点を持つという.*

命題 4.13. *標数 0 の体上の代数多様体 X に対して*

$$
\begin{aligned}
X \text{ は正則 (非特異) である } &\Longrightarrow X \text{ は高々有理特異点を持つ} \\
&\Longrightarrow X \text{ は Cohen–Macaulay かつ正規である.}
\end{aligned}
$$

定理 4.14 (Boutot [2])**.** *k を標数 0 の体とする. 環拡大 $k \subset B \subset A$ は, A, B が k 上本質的に有限型, かつ B は A の純部分環とする. Spec A が高々有理特異点を持てば Spec B も高々有理特異点を持つ.*

先に述べたように, 線型簡約群の不変式環はもとの環の純部分環であった. 先の関係により, 元の環が正則ならば高々有理特異点を持ち, Boutot の定理から不変式環も高々有理特異点を持ち, したがって Cohen–Macaulay である. このようにして標数 0 の場合には Hochster–Roberts の定理の一般化が示される.

素数標数の場合には, Frobenius 写像が本質的な役割を果たす. A を Noether $\mathbb{F}_p$ 代数とする.

定義 4.15. *写像*

$$F : A \to A; F(x) = x^p$$

は環準同型となる, これを Frobenius 写像という.

Hochster と Huneke は, Frobenius 写像を用いてイデアルの密着閉包を導入し, F 正則性を定義した. A に対して, $A^\circ := A \setminus \bigcup_{P \in \operatorname{Min} A} P$, ここで $\operatorname{Min} A$ は A の極小素因子の全体, とする. また A のイデアル I と自然数 $e > 0$ に対して $I^{[p^e]} := (x^{p^e} \mid x \in I)$ とする.

定義 4.16 (密着閉包 [13])**.** *A のイデアル I の密着閉包 I^* を*

$$x \in I^* \iff \exists c \in A^\circ \,\text{such that}\, cx^{p^e} \in I^{[p^e]} \,\text{for any}\, e \gg 0.$$

と定義する. $I = I^*$ が成り立つとき, I は密着閉という.

イデアルの密着閉包を利用することで, 正標数の環の有用なクラスを定義することができる.

定義 4.17. (1) A の任意のイデアルが密着閉のとき, A は F 正則と言う.
(2) イデアル I が $\operatorname{ht} I$ 個の元で生成されれば密着閉となるとき, A は F 有理という.

命題 4.18. *A を Noether $\mathbb{F}_p$ 代数とする. このとき,*

$$\begin{aligned} A \text{ は正則である} &\implies A \text{ は } F \text{ 正則である} \\ &\implies A \text{ は } F \text{ 有理である} \\ &\implies A \text{ は正規である.} \end{aligned}$$

さらに A が優秀 (e.g., 本質的に有限型の代数など) のとき, F 有理環は Cohen–Macaulay である.

これらの性質によって, Boutot の定理の正標数における類似が次のように与えられる.

定理 4.19 (本質的に Hochster–Huneke [13])**.** *A を Noether $\mathbb{F}_p$ 代数, B を A の純部分環とする. このとき, A が F 正則ならば B も F 正則である.*

注意 4.20. 「有理特異点」の正標数における対応物は「F 有理環」と考えられる. 実際に, 標数 0 の体の上の代数 A に対して

$$A \text{ は高々有理特異点を持つ} \iff A \text{ は } F \text{ 有理型である}$$

が成り立つ (原伸生 [6]–Smith[31]). しかしながら, 上記定理において「F 正則」を「F 有理」に置き換えた主張は成り立たないことが知られている (渡辺敬一 [35])

さて, Weyl と永田雅宜による線型簡約群の特徴づけ (定理 3.18) を思い出そう. 標数 0 ではすべての幾何学的簡約群は線型簡約だったので, Hochster–Roberts の定理は充分一般的な回答を与えていると言えよう. しかしながら, 正標数においては線型簡約群は極めて限られた形をしており, Cohen–Macaulay 性の可否についてもう少し詳しく調べる必要がある.

まず, 不変式環が Cohen–Macaulay とはならない有限群の作用を紹介する.

例 4.21 (Bertin)**.** k を標数 2 の閉体, $G = \langle \sigma \rangle$ を 4 次巡回群とする. G の 4 次元表現 V が

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定義されるとき, 不変式環 $k[V]^G$ は Cohen–Macaulay でない.

正標数の簡約群について, 良く知られた作用は概ね Cohen–Macaulay になることが知られている. 具体的に個別の議論が積み上げられ, 比較的楽観的な見方も多かったと思われるが, Kemper により次が提出され状況は一変した.

定理 4.22 (Kemper [16]). *k を代数閉体, G を線型簡約でない幾何学的簡約群とする．このとき G の有限次元表現 V が存在して, 不変式環 $k[V]^G$ は Cohen–Macaulay でない.*

その後もさまざまな研究者によって, $\dim k[V]^G - \operatorname{depth} k[V]^G$ の評価が詳しく与えられている.

一方, 古くから Cohen–Macaulay になることが知られている作用の例は数多存在する. これらの表現の「良さ」を表現論的に表したものが「良いフィルター付け」の概念である.

定義 4.23 (双対 Weyl 加群). k を代数閉体, G は簡約群とし, G の Borel 部分群 B をひとつ固定する. B の 1 次元表現 λ に対して,

$$\nabla(\lambda) := \operatorname{ind}_B^G \lambda,$$

ここで ind_B^G は制限関手 $\operatorname{res}_B^G : \operatorname{Mod} G \to \operatorname{Mod} B$ の右随伴関手とする, を最高ウェイト λ の双対 Weyl 加群という.

定義 4.24 (良いフィルター付け). G 加群 V のフィルター付け $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$ が (1) $V = \bigcup V_i$, (2) すべての V_{i+1}/V_i はある双対 Weyl 加群に同型, を満たすとき, 良いフィルター付けという.

良いフィルター付けについては, 簡約群の表現論の教科書, 例えば Jantzen [15] を参照されたい.

次の定理は純部分環を経由しないで Cohen–Macaulay 性を示している点で重要な定理である.

定理 4.25 (橋本 [8]). *k は正標数の閉体, G は簡約群, V は有限次元 G 加群とする．もし $k[V]$ が G 加群として良いフィルター付けを持つならば, 不変式環 $(\operatorname{Sym} V)^G$ は F 正則である.*

この定理を踏まえて, 著者は (願望を込めて) 次のように予想しておきたい.

予想 4.26. G 代数 A が k 上有限生成で良いフィルター付けを持ち, かつ F 正則ならば不変式環 A^G も F 正則である.

橋本の定理を, 予想に向けて一般化したのが次の定理である.

定理 4.27 (O). *V を有限生成 G 加群, $S = k[V]$, $\mathfrak{m} = S_+$ とする．Rees 代数 $A = S[\mathfrak{m}t] \subset S[t]$ が G 代数として良いフィルター付けを持てば, A^G は F 正則である.*

また, 次が正しい.

定理 4.28 (橋本 [10]). *k を正標数の閉体, G を簡約群とする．G の Borel 部分群 B をひとつ固定し, P を B を含む parabolic 部分群, U_P を P の冪単根基とする．有限次元 G 加群 V は, $S = \operatorname{Sym} V$ が G 加群として良いフィルター付けを持つものとする．このとき不変式環 S^{U_P} は Cohen–Macaulay である.*

この定理は定理 4.25 の一般化となっている. 実際, Borel 部分群 B の冪単根基 U に対して S^B は S^U のトーラスによる不変式環であり, 特に直和因子である. $\mathrm{Sym}\, V$ が F 正則ならば上記定理により S^U も F 正則, したがって S^B も F 正則となる. ところで $S^B = S^G$ が成り立つので, S^G も F 正則となる.

Gorenstein 環についても簡単に触れておこう.

定義 4.29 (Gorenstein 環)**.** Noether 局所環 A が Gorenstein とは, 入射次元 $\mathrm{inj.\,dim}_A\, A$ が有限となることをいう.

不変式環の Gorenstein 性の研究は, Cohen–Macaulay 性プラス正準加群の評価, という方針が主流であった.

定義 4.30 (正準加群)**.** $(A, \mathfrak{m}, k)$ を Cohen–Macaulay 局所環とする. 有限生成 A 加群 ω が (1) 極大 Cohen–Macaulay 加群, すなわち $\mathrm{depth}\, M = \dim A$ が成り立ち, (2) 入射次元有限で, かつ (3) Cohen–Macaulay 型が 1 となるとき, A の正準加群と言う.

全ての Cohen–Macaulay 局所環が正準加群を持つわけではない. A が正準加群を持つための必要十分条件は Gorenstein 環の全射像となることである (Sharp [30]). 特に本質的に有限生成な局所環は正準加群を持つことに注意する.

正準加群がいつ自由加群になるかを判定するには, それを因子的イデアルとして実現し, 因子類群の中で単位元になるかを調べるのが良い. 例えば次が正しい.

命題 4.31. *A が体上有限型の代数とする. A が Cohen–Macaulay かつ UFD ならば Gorenstein である.*

不変式環の UFD 性については次が有名である.

定理 4.32. *G を代数群, S を G 代数とする. S が UFD, G の指標 (i.e., 1 次元表現) のなす群 $X(G)$ が自明で, かつ (a) S は有限生成かつ G は連結, または (b) $S^\times \subset S^G$ が成り立つとき, S^G も UFD である.*

有限群および代数トーラスの場合には, 正準加群を具体的に調べ次が得られる.

定理 4.33 (渡辺敬一–Stanley)**.** *G は線型簡約な有限群または代数トーラス, V を n 次元 G 加群で $\wedge^{\mathrm{top}} V$ が自明になるものとする. このとき $k[V]^G$ は Gorenstein である.*

G が有限群の場合, より詳しく次が正しい.
(1) $S^{\det}(-n)$ は S^G の次数付き正準加群である,
(2) $G \subset SL_n$ ならば S^G は Gorenstein である.

References

[1] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, 2nd ed., Graduate Texts in Math. **126**, Springer (1991).

[2] J.-F. Boutot, Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs, *Invent. Math.*, **88** (1987), 65–68.

[3] D. Daigle and G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension 5, *J. Algebra*, **221** (1999), 528–535.

[4] D. Daigle and G. Freudenburg, Triangular derivations of $k[X_1, X_2, X_3, X_4]$, *J. Algebra*, **241** (2001), 328–339.

[5] W. Haboush, Reductive groups are geometrically reductive, *Ann. of Math. (2)*, **102** (1975), 67–83.

[6] N. Hara, A characterization of rational singularities in terms of injectivity of Frobenius maps, *Amer. J. Math.*, *120* (1998), 981–996.

[7] M. Hashimoto, A pure subalgebra of a finitely generated algebra is finitely generated, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133** (2005), 2233–2235.

[8] M. Hashimoto, Good

ltrations of symmetric algebras and strong F-regularity of invariant subrings, *Math. Z.*, **236** (2001), 605–623.

[9] 橋本光靖, 不変式環の環論的性質, 第 53 回代数学シンポジウム報告集, `http://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp08.html`.

[10] M. Hashimoto, Good filtrations and strong F-regularity of the ring of U_P-invariants, *J. Algebra*, **370** (2012), 198–220.

[11] D. Hilbert, Über die Theorie der algeraischen Formen, *Math. Ann.*, **36** (1890), 473–534.

[12] M. Hochster and J. A. Eagon, Cohen–Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfections of determinantal loci, *Amer. J. Math.*, **93** (1971), 1020–1059.

[13] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure, invariant theory, and Briançon–Skoda theorem, *J. Amer. Math. Soc.*, **3** (1990), 31–116.

[14] M. Hochster and J. Roberts, Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay, Adv. Math., **13** (1974), 115–175.

[15] J. C. Jantzen, Representations of algebraic groups, Second edition, AMS (2003).

[16] G. Kemper, A characterization of lineary reductive groups by their invariants, *Transform. Groups*, **5** (2000), 1–8.

[17] T. Kawasaki, On arithmetic Macaulayfication of Noetherian rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354** (2002), 123–149.

[18] S. Kuroda, A condition for finite generation of the kernel of a derivation, *J. Algebra*, **262** (2003), 391–400.

[19] S. Kuroda, A counterexample to the fourteenth problem of Hilbert in dimension three, *Michigan Math. J.*, **53** (2005), 123–132.

[20] S. Kuroda, Fields defined by locally nilpotent derivations and monomials, *J. Algebra*, **293** (2005), 395–406.

[21] 松村英之, 復刊 可換環論, 共立出版 (2000).

[22] S. Mukai, Counterexample to Hilbert's fourteenth problem for the 3-dimensional additive group, preprint, RIMS–1343 (2001).

[23] M. Nagata, On the 14-th problem of Hilbert, *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 766–772.

[24] M. Nagata, Complete reducibility of rational representations of a matrix group, *J. Math. Kyoto Univ.*, **1** (1961), 87–99.

[25] M. Nagata, Invariants of a group in an affine ring, *J. Math. Kyoto Univ.*, **3** (1963/64) 369–377.

[26] A. Nowicki and M. Nagata, Rings of constants for k-derivations in $k[x_1, \ldots, x_n]$, *J. Math. Kyoto Univ.*, **28** (1988), 111–118.

[27] V. L. Popov, Hilbert's theorem on invariants, *Soviet Math. Dokl.*, **20** (1979), 1318–1322.

[28] V. L. Popov, On the stability of the action of an algebraic group on an algebraic variety, *Math. USSR-Izv.*, **6** (1972), 367–379.

[29] P. Roberts, An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem, *J. Algebra*, **132** (1990), 461–473.

[30] R. Y. Sharp, On Gorenstein modules over a complete Cohen-Macaulay local ring, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*(2), **22** (1971), 425–434.

[31] K. E. Smith, F-rational rings have rational singularities, *Amer. J. Math.*, **119** (1997), 159–180.

[32] R. P. Stanley, Hilbert functions and graded algebras, *Adv. Math.*, **28** (1978), 57–83.

[33] K.-i. Watanabe, Certain invariant subrings are Gorenstein I, *Osaka J. Math.*, **11** (1974), 1–8.

[34] K.-i. Watanabe, Certain invariant subrings are Gorenstein II, *Osaka J. Math.*, **11** (1974), 379–388.

[35] K.-i. Watanabe, F-rationality of certain Rees algebras and counterexamples to "Boutot's theorem" for F-rational rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **122** (1997), 323–328.

[36] 渡辺敬一, 有限群の不変式論,「群論の進化」, 朝倉書店 (2004), pp. 135–183.

[37] O. Zariski, Interprétations algébrico-géométriques du quatroziéme probléme de Hilbert, *Bull. Sci. Math.*, **78** (1954), 155–168.